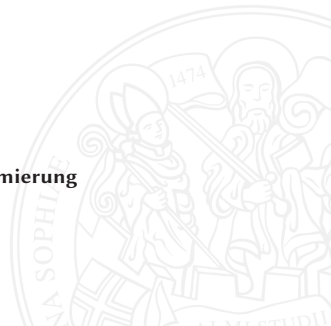


Stochastische Sublösungen

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Definition 5.16 (Stochastische Sublösung)

Eine Funktion $h : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stochastische Sublösung** der HJB Gleichung (5.1), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

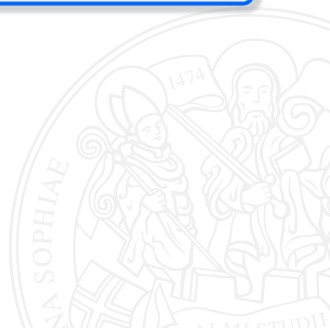
- (i) h ist stetig.
- (ii) $\Psi_{\mathcal{V}}$ ist eine Lyapunov Funktion für h .
- (iii) h erfüllt die Randbedingung $h(T, x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$.
- (iv) Für jede $\bar{\mathcal{T}}$ -wertige Stoppzeit τ und jede $\mathfrak{F}(\tau)$ -messbare, \mathcal{O} -wertige Zufallsvariable ξ mit $E[\Psi(\tau, \xi)] < \infty$ existiert ein zulässiger Kontrollprozess $\nu \in \mathcal{A}(\tau, \xi)$, so dass für jede $\bar{\mathcal{T}}_{\tau}$ -wertige Stoppzeit ρ gilt

$$h(\tau, \xi) \leq E \left[h(\rho, X_{\tau, \xi}^{\nu}(\rho)) + \int_{\tau}^{\rho} f(X_{\tau, \xi}^{\nu}(r), \nu(r)) dr \middle| \mathfrak{F}(\tau) \right].$$

Die Menge aller stochastischen Sublösungen bezeichnen wir mit \mathbb{H}^{-} .

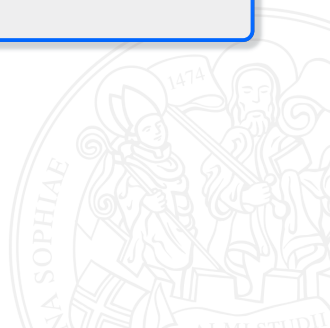
Lemma 5.18 (\mathbb{H}^- ist dominiert durch \mathcal{V})

Es gilt $h \leq \mathcal{V}$ für alle $h \in \mathbb{H}^-$.



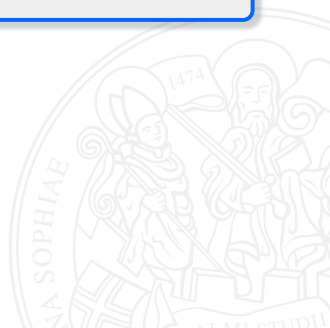
Lemma 5.19 (\mathbb{H}^- ist nach oben gerichtet)

Seien $h_1, h_2 \in \mathbb{H}^-$. Dann ist auch das punktweise Maximum $h \triangleq h_1 \vee h_2$ ein Element von \mathbb{H}^- . Insbesondere existiert deswegen eine nicht-fallende Folge $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}^-$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \mathbb{V}^-$.



Theorem 5.20 (Superlösungseigenschaft)

Die von unten halbstetige Funktion $\mathbb{V}^- : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Superlösung der HJB Gleichung im Viskositätssinne.



Theorem 5.21 (Superlösungseigenschaft zum Endzeitpunkt)

Es gilt $\mathbb{V}^-(T, x) \geq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$.

