Universität Trier

Stochastische Sublösungen

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Stochastische Sublösung

Definition 5.16 (Stochastische Sublösung)

Eine Funktion $h : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ heißt **stochastische Sublösung** der HJB Gleichung (5.1), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) h ist stetig.

(ii) $\Psi_{\mathcal{V}}$ ist eine Lyapunov Funktion für h.

(iii) h erfüllt die Randbedingung $h(T, x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$.

(iv) Für jede $\overline{\mathcal{T}}$-wertige Stoppzeit τ und jede $\mathfrak{F}(\tau)$-messbare, $\mathcal{O}$-wertige Zufallsvariable ξ mit $\mathrm{E}[\Psi(\tau, \xi)] < \infty$ existiert ein zulässiger Kontrollprozess $\nu \in \mathcal{A}(\tau, \xi)$, so dass für jede $\overline{\mathcal{T}}_{\tau}$-wertige Stoppzeit ρ gilt

$$h(\tau, \xi) \leq \mathrm{E}\Big[h\big(\rho, X^{\nu}_{\tau,\xi}(\rho)\big) + \int_{\tau}^{\rho} f\big(X^{\nu}_{\tau,\xi}(r), \nu(r)\big)\mathrm{d}r \Big| \mathfrak{F}(\tau)\Big].$$

Die Menge aller stochastischen Sublösungen bezeichnen wir mit $\mathbb{H}^{-}$.

$\mathbb{H}^-$ ist dominiert durch $\mathcal{V}$

Lemma 5.18 ($\mathbb{H}^-$ ist dominiert durch $\mathcal{V}$)

Es gilt $h \leq \mathcal{V}$ für alle $h \in \mathbb{H}^-$.

$\mathbb{H}^-$ ist nach oben gerichtet

Lemma 5.19 ($\mathbb{H}^-$ ist nach oben gerichtet)

Seien $h_1, h_2 \in \mathbb{H}^-$. Dann ist auch das punktweise Maximum $h \triangleq h_1 \vee h_2$ ein Element von $\mathbb{H}^-$. Insbesondere existiert deswegen eine nicht-fallende Folge $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}^-$ mit $\lim_{k\to\infty} h_k = \mathbb{V}^-$.

Superlösungseigenschaft von $\mathbb{V}^-$

Theorem 5.20 (Superlösungseigenschaft)

Die von unten halbstetige Funktion $\mathbb{V}^- : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ ist eine Superlösung der HJB Gleichung im Viskositätssinne.

Superlösungseigenschaft zum Endzeitpunkt

Theorem 5.21 (Superlösungseigenschaft zum Endzeitpunkt)

Es gilt $\mathbb{V}^-(T,x) \geq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$.