

Bedingte Verteilungen und Übergangskerne

Tutorium Stochastische Prozesse
07. Februar 2017



Einfache bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$.

Frage: Wie definiert man die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\cdot|A]$?



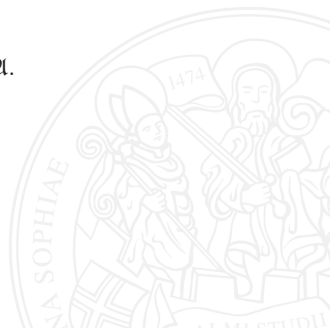
Einfache bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$.

Frage: Wie definiert man die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\cdot|A]$?

Antwort: Falls $\mathbb{P}[A] > 0$, definiere

$$\mathbb{P}[B|A] \triangleq \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}, \quad B \in \mathfrak{A}.$$



Definition über bedingte Erwartungswerte

Frage: Sei $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine Teil- σ -Algebra. Wie definiert man $\mathbb{P}[\cdot | \mathfrak{F}]$?



Definition über bedingte Erwartungswerte

Frage: Sei $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine Teil- σ -Algebra. Wie definiert man $\mathbb{P}[\cdot|\mathfrak{F}]$?

Idee: Definiere

$$\mathbb{P}[B|\mathfrak{F}] \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathfrak{F}], \quad B \in \mathfrak{A}.$$

Wo ist dabei das Problem?



Definition über bedingte Erwartungswerte

Frage: Sei $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine Teil- σ -Algebra. Wie definiert man $\mathbb{P}[\cdot|\mathfrak{F}]$?

Idee: Definiere

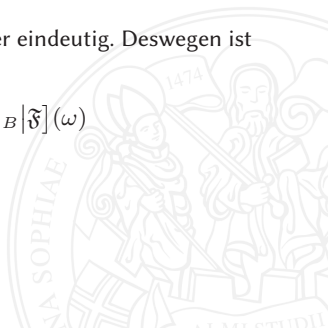
$$\mathbb{P}[B|\mathfrak{F}] \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathfrak{F}], \quad B \in \mathfrak{A}.$$

Wo ist dabei das Problem?

Antwort: Der bedingte Erwartungswert ist nur fast sicher eindeutig. Deswegen ist die Abbildung

$$\mathfrak{A} \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}[B|\mathfrak{F}](\omega) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathfrak{F}](\omega)$$

nicht unbedingt ein Maß für alle $\omega \in \Omega$.



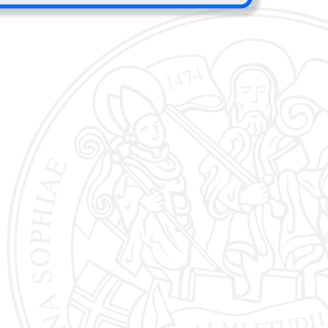
Definition (Übergangskern)

Sei (S, \mathfrak{G}) ein messbarer Raum. Eine Abbildung

$$\mathbb{K} : S \times \mathfrak{G} \rightarrow [0, 1], \quad (x, B) \mapsto \mathbb{K}(x, B)$$

heißt **Übergangskern** auf (S, \mathfrak{G}) , falls

- (1) $x \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist \mathfrak{G} -messbar für alle $B \in \mathfrak{G}$, und
- (2) $B \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist ein WMaß auf (S, \mathfrak{G}) für alle $x \in S$.



Definition (Übergangskern)

Sei (S, \mathfrak{G}) ein messbarer Raum. Eine Abbildung

$$\mathbb{K} : S \times \mathfrak{G} \rightarrow [0, 1], \quad (x, B) \mapsto \mathbb{K}(x, B)$$

heißt **Übergangskern** auf (S, \mathfrak{G}) , falls

- (1) $x \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist \mathfrak{G} -messbar für alle $B \in \mathfrak{G}$, und
- (2) $B \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist ein WMaß auf (S, \mathfrak{G}) für alle $x \in S$.

Definition (Bedingte Verteilung)

Für S -wertige Zufallsvariablen X und Y heißt ein Übergangskern \mathbb{K} auf (S, \mathfrak{G}) eine **bedingte Verteilung** von Y gegeben X , falls

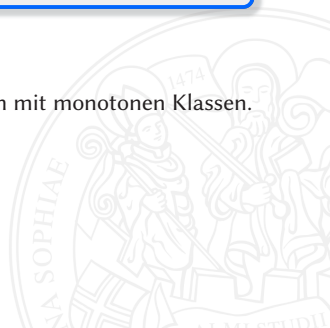
$$\mathbb{K}(X, B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y \in B\}} | \sigma(X)] (= \mathbb{P}[Y \in B | X]) \text{ f.s. für alle } B \in \mathfrak{G}.$$

Proposition 25 (PT)

Sei \mathbb{K} eine bedingte Verteilung von Y gegeben X . Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(Y)|X] = \int_S \mathbb{K}(X, dy) f(y) \quad \text{f.s. für alle } f \in L_b(S).$$

Beweis: Klar für $f = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathfrak{G}$. Die Aussage folgt dann mit monotonen Klassen.



Theorem 29 (PT)

Sei (S, \mathfrak{G}) ein vollständiger, separabler metrischer Raum und X, Y seien S -wertige Zufallsvariablen. Dann existiert eine bedingte Verteilung von Y gegeben X .

