Universität Trier

Bedingte Verteilungen und Übergangskerne

Tutorium Stochastische Prozesse

07. Februar 2017

Einfache bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$.

Frage: Wie definiert man die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\cdot|A]$?

Einfache bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$.

Frage: Wie definiert man die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\cdot|A]$?

Antwort: Falls $\mathbb{P}[A] > 0$, definiere

$$\mathbb{P}[B|A] \triangleq \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}, \qquad B \in \mathfrak{A}.$$

Definition über bedingte Erwartungswerte

Frage: Sei $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine Teil-σ-Algebra. Wie definiert man $\mathbb{P}[\cdot|\mathfrak{F}]$?

Definition über bedingte Erwartungswerte

Frage: Sei $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine Teil-σ-Algebra. Wie definiert man $\mathbb{P}[\cdot|\mathfrak{F}]$?

Idee: Definiere

$$\mathbb{P}[B|\mathfrak{F}] \triangleq \mathrm{E}\big[\mathbb{1}_B\big|\mathfrak{F}\big], \qquad B \in \mathfrak{A}.$$

Wo ist dabei das Problem?

Definition über bedingte Erwartungswerte

Frage: Sei $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ eine Teil-σ-Algebra. Wie definiert man $\mathbb{P}[\cdot|\mathfrak{F}]$?

Idee: Definiere

$$\mathbb{P}[B|\mathfrak{F}] \triangleq \mathrm{E}\big[\mathbb{1}_B\big|\mathfrak{F}\big], \qquad B \in \mathfrak{A}.$$

Wo ist dabei das Problem?

Antwort: Der bedingte Erwartungswert ist nur fast sicher eindeutig. Deswegen ist die Abbildung

$$\mathfrak{A} \to [0,1], \qquad B \mapsto \mathbb{P}[B|\mathfrak{F}](\omega) = \mathrm{E}\big[\mathbb{1}_B\big|\mathfrak{F}\big](\omega)$$

nicht unbedingt ein Maß für alle $\omega \in \Omega$.

Übergangskerne und bedingte Verteilungen

Definition (Übergangskern)

Sei $(S, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung

$$\mathbb{K} : S \times \mathfrak{S} \to [0, 1], \qquad (x, B) \mapsto \mathbb{K}(x, B)$$

heißt **Übergangskern** auf $(S, \mathfrak{S})$, falls

(1) $x \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist $\mathfrak{S}$-messbar für alle $B \in \mathfrak{S}$, und

(2) $B \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist ein WMaß auf $(S, \mathfrak{S})$ für alle $x \in S$.

Übergangskerne und bedingte Verteilungen

Definition (Übergangskern)

Sei $(S, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung

$$\mathbb{K} : S \times \mathfrak{S} \to [0,1], \qquad (x, B) \mapsto \mathbb{K}(x, B)$$

heißt **Übergangskern** auf $(S, \mathfrak{S})$, falls

(1) $x \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist $\mathfrak{S}$-messbar für alle $B \in \mathfrak{S}$, und

(2) $B \mapsto \mathbb{K}(x, B)$ ist ein WMaß auf $(S, \mathfrak{S})$ für alle $x \in S$.

Definition (Bedingte Verteilung)

Für S-wertige Zufallsvariablen X und Y heißt ein Übergangskern $\mathbb{K}$ auf $(S, \mathfrak{S})$ eine **bedingte Verteilung** von Y gegeben X, falls

$$\mathbb{K}(X, B) = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y \in B\}} \middle| \sigma(X)\right] (= \mathbb{P}[Y \in B | X]) \text{ f.s. für alle } B \in \mathfrak{S}.$$

Proposition 25 (PT)

Sei $\mathbb{K}$ eine bedingte Verteilung von Y gegeben X. Dann gilt

$$\mathrm{E}\big[f(Y)|X\big] = \int_S \mathbb{K}(X, \mathrm{d}y) f(y) \qquad \text{f.s. für alle } f \in \mathrm{L}_b(S).$$

Beweis: Klar für $f = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathfrak{S}$. Die Aussage folgt dann mit monotonen Klassen.

Existenz bedingter Verteilungen

Theorem 29 (PT)

Sei $(S, \mathfrak{S})$ ein vollständiger, separabler metrischer Raum und X, Y seien S-wertige Zufallsvariablen. Dann existiert eine bedingte Verteilung von Y gegeben X.