Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 13

Abgabe: Donnerstag, 09. Februar, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein (potentiell nicht adaptierter) Prozess mit $X(t) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ für alle $t \in \mathcal{T}$. Beweisen Sie den Konvergenzsatz von Lévy-Doob:

(a) Falls $\inf \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$ und $X(t) \to Z$ in $\mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ für $t \downarrow \inf \mathcal{T}$ für ein $Z \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$, dann gilt

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathfrak{F}(t)] \to \mathbb{E}[Z|\mathfrak{F}(\inf \mathcal{T})] \text{ in } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}) \text{ für } t \downarrow \inf \mathcal{T}.$$

(b) Falls $\sup \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$ und $X(t) \to Z$ in $\mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ für $t \uparrow \sup \mathcal{T}$ für ein $Z \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$, dann gilt

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathfrak{F}(t)] \to \mathbb{E}[Z|\mathfrak{F}(\sup \mathcal{T})] \text{ in } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}) \text{ für } t \uparrow \sup \mathcal{T}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Lévy's Upward-Downward Theorem (Korrolar 49 im Skript).

Definition 1 (Übergangshalbgruppe)
Eine Familie $\mathbb{K} = \{\mathbb{K}_{s,t}\}_{s,t\in\mathcal{T},s<t}$ von Übergangskernen auf $(S, \mathfrak{S})$ heißt *Übergangshalbgruppe*, falls für alle $f \in \mathrm{L}_b(S)$ und alle $r, s, t \in \mathcal{T}$ mit $r < s < t$ gilt, dass

$$\int \mathbb{K}_{r,t}(x, \mathrm{d}z) f(z) = \int \mathbb{K}_{r,s}(x, \mathrm{d}y) \int \mathbb{K}_{s,t}(y, \mathrm{d}z) f(z) \text{ für alle } x \in S.$$

Ist $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess, so dass der Übergangskern $\mathbb{K}_{s,t}$ für alle $s, t \in \mathcal{T}$ mit $s < t$ eine bedingte Verteilung von $X(t)$ gegeben $\mathfrak{F}^X(s)$ ist, also falls

$$\mathbb{E}\left[f(X(t))\middle|\mathfrak{F}^X(s)\right] = \int \mathbb{K}_{s,t}(X(s), \mathrm{d}y) f(y) \text{ fast sicher für alle } f \in \mathrm{L}_b(S),$$

dann nennen wir X einen Markov Prozess mit Übergangshalbgruppe $\mathbb{K}$.

Aufgabe 2
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein Markov Prozess mit Übergangshalbgruppe $\mathbb{K}$. Weiter sei $f \in \mathrm{L}_b(S)$ und $T \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass der Prozess $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T},t\leq T}$ gegeben durch

$$Y(t) \triangleq \int \mathbb{K}_{t,T}(X(t), \mathrm{d}y) f(y) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}, t \leq T$$

ein Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^X$ ist.

$\longrightarrow$ Zweite Seite nicht vergessen!

Aufgabe 3
Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine endliche Menge und sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stochastische Matrix, d.h. $P_{i,j} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ und $\sum_{j=1}^n P_{i,j} = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Weiter sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen mit $Z_1 \sim \mathrm{Uniform}([0,1])$. Definiere $g : [0,1] \times S \to S$ durch

$$g(z, x_i) \triangleq x_j \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{k=1}^{j-1} P_{i,k} \leq z < \sum_{k=1}^{j} P_{i,k} \text{ für } i, j = 1, \dots, n,$$

und sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit $X(0) = x_1$ und

$$X(t) \triangleq g(Z_t, X(t-1)) \text{ für alle } t \in \mathbb{N}$$

die zugehörige Markov-Kette. Zeigen Sie, dass X ein S-wertiger Markov-Prozess ist und bestimmen Sie die Übergangshalbgruppe.

Aufgabe 4
Sei X ein Markov Prozess mit Übergangshalbgruppe $\mathbb{K}$. Weiter sei $g : S \to \mathbb{R}$ eine subharmonische Funktion, d.h. g ist messbar, beschränkt und

$$g(x) \leq \int \mathbb{K}_{s,t}(x, \mathrm{d}y) g(y) \text{ für alle } x \in S, s, t \in \mathcal{T}, s \leq t.$$

Zeigen Sie, dass $g(X) = \{g(X(t))\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein Submartingal bezüglich $\mathfrak{F}^X$ ist.