Universität Trier

Stochastische Superlösungen

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Stochastische Superlösung

Definition 5.8 (Stochastische Superlösung)

Eine Funktion $h : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ heißt **stochastische Superlösung** der HJB Gleichung (5.1), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) h ist stetig.

(ii) $\Psi_{\mathcal{V}}$ ist eine Lyapunov Funktion für h.

(iii) h erfüllt die Randbedingung $h(T, x) \geq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$.

(iv) Für jedes $(t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und für jeden zulässigen Kontrollprozess $\nu \in \mathcal{A}(t, x)$ ist der Prozess

$$\left\{h\big(s, X^{\nu}_{t,x}(s)\big) + \int_t^s f\big(X^{\nu}_{t,x}(r), \nu(r)\big)\mathrm{d}r\right\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$$

ein Supermartingal.

Die Menge aller stochastischen Superlösungen bezeichnen wir mit $\mathbb{H}^+$.

$\mathbb{H}^+$ dominiert $\mathcal{V}$

Lemma 5.10 ($\mathbb{H}^+$ dominiert $\mathcal{V}$)

Es gilt $h \geq \mathcal{V}$ für alle $h \in \mathbb{H}^+$.

Abzählbare Approximation

Lemma 5.11 (Abzählbare Approximation)

Sei (M, d) ein separabler metrischer Raum und sei $\mathcal{H}$ eine Menge von stetigen Funktionen $h : M \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, so dass

$$h_0(x) \triangleq \inf\{h(x) : h \in \mathcal{H}\} = \inf\{h(x) : h \in \mathcal{H}_0\} \qquad \text{für alle } x \in M.$$

$\mathbb{H}^+$ ist nach unten gerichtet

Lemma 5.12 ($\mathbb{H}^+$ ist nach unten gerichtet)

Seien $h_1, h_2 \in \mathbb{H}^+$. Dann ist auch das punktweise Minimum $h \triangleq h_1 \wedge h_2$ ein Element von $\mathbb{H}^+$.

Monotone Approximation von $\mathbb{V}^+$

Korollar 5.13 (Monotone Approximation von $\mathbb{V}^+$)

Es existiert eine nicht-wachsende Folge $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}^+$ mit

$$\mathbb{V}^+(t,x) = \lim_{k\to\infty} h_k(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$

Sublösungseigenschaft von $\mathbb{V}^+$

Theorem 5.14 (Sublösungseigenschaft)

Die von oben halbstetige Funktion $\mathbb{V}^+ : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ ist eine Sublösung der HJB Gleichung im Viskositätssinne.

Sublösungseigenschaft zum Endzeitpunkt

Theorem 5.15 (Sublösungseigenschaft zum Endzeitpunkt)

Es gilt $\mathbb{V}^+(T, x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$.