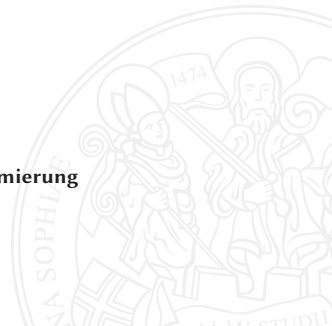


# Stochastische Superlösungen

**Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung**



## Definition 5.8 (Stochastische Superlösung)

Eine Funktion  $h : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stochastische Superlösung** der HJB Gleichung (5.1), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $h$  ist stetig.
- (ii)  $\Psi_{\mathcal{V}}$  ist eine Lyapunov Funktion für  $h$ .
- (iii)  $h$  erfüllt die Randbedingung  $h(T, x) \geq g(x)$  für alle  $x \in \mathcal{O}$ .
- (iv) Für jedes  $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$  und für jeden zulässigen Kontrollprozess  $\nu \in \mathcal{A}(t, x)$  ist der Prozess

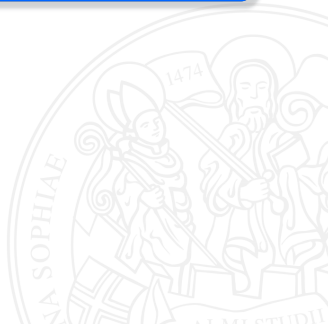
$$\left\{ h(s, X_{t,x}^{\nu}(s)) + \int_t^s f(X_{t,x}^{\nu}(r), \nu(r)) dr \right\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_t}$$

ein Supermartingal.

Die Menge aller stochastischen Superlösungen bezeichnen wir mit  $\mathbb{H}^+$ .

## Lemma 5.10 ( $\mathbb{H}^+$ dominiert $\mathcal{V}$ )

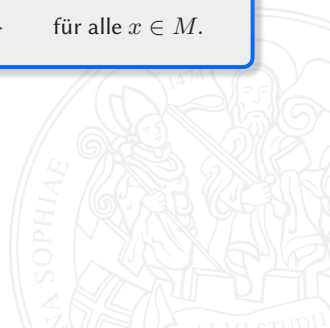
Es gilt  $h \geq \mathcal{V}$  für alle  $h \in \mathbb{H}^+$ .



## Lemma 5.11 (Abzählbare Approximation)

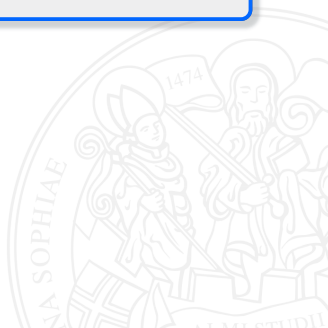
Sei  $(M, d)$  ein separabler metrischer Raum und sei  $\mathcal{H}$  eine Menge von stetigen Funktionen  $h : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann existiert eine abzählbare Teilmenge  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ , so dass

$$h_0(x) \triangleq \inf\{h(x) : h \in \mathcal{H}\} = \inf\{h(x) : h \in \mathcal{H}_0\} \quad \text{für alle } x \in M.$$



## Lemma 5.12 ( $\mathbb{H}^+$ ist nach unten gerichtet)

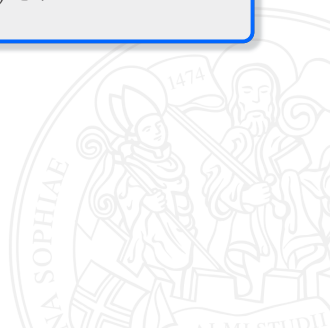
Seien  $h_1, h_2 \in \mathbb{H}^+$ . Dann ist auch das punktweise Minimum  $h \triangleq h_1 \wedge h_2$  ein Element von  $\mathbb{H}^+$ .



## Korollar 5.13 (Monotone Approximation von $\mathbb{V}^+$ )

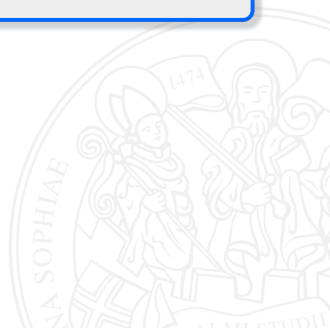
Es existiert eine nicht-wachsende Folge  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}^+$  mit

$$\mathbb{V}^+(t, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(t, x) \quad \text{für alle } (t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$



## Theorem 5.14 (Sublösungseigenschaft)

Die von oben halbstetige Funktion  $\mathbb{V}^+ : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Sublösung der HJB Gleichung im Viskositätssinne.



## Theorem 5.15 (Sublösungseigenschaft zum Endzeitpunkt)

Es gilt  $\mathbb{V}^+(T, x) \leq g(x)$  für alle  $x \in \mathcal{O}$ .

