Universität Trier

Der Vergleichssatz

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Lyapunov Funktion

Definition 5.2 (Lyapunov Funktion)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Dann nennen wir eine nicht-negative, stetige Funktion $\Psi : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to [0, \infty)$ eine **Lyapunov Funktion** für w, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Psi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$ ist eine strikte Superlösung der HJB Gleichung, d.h. auf jedem Kompaktum $\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ existiert eine Konstante $\kappa > 0$ mit

$$-\partial_t \Psi(t,x) - H\big(x, \mathrm{D}_x \Psi(t,x), \mathrm{D}_x^2 \Psi(t,x)\big) \geq \kappa \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathcal{K}.$$

(ii) Es existiert eine Konstante $K > 0$, so dass

$$0 \leq |w(t,x)| \leq K\big(1 + \Psi(t,x)\big) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$

(iii) Für alle $t \in \overline{\mathcal{T}}$ und alle Konstanten $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{x \to \partial \mathcal{O}} \big[|w(t,x)| - \varepsilon \Psi(t,x)\big] = -\infty. \tag{5.2}$$

Der Vergleichssatz

Theorem 5.3 (Vergleichssatz)

Sei $u : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine von oben halbstetige Sublösung der HJB Gleichung (5.1) im Viskositätssinne und sei $v : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine von unten halbstetige Superlösung der HJB Gleichung (5.1) im Viskositätssinne. Sei weiter angenommen, es existiert eine gemeinsame Lyapunov Funktion $\Psi : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to [0, \infty)$ für u und v und es gelte

$$u(T, x) \leq v(T, x) \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{O}. \tag{5.3}$$

Dann gilt $u(t, x) \leq v(t, x)$ für alle $(t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$.

Eindeutigkeit von Viskositätslösungen

Korollar 5.4 (Eindeutigkeit von Viskositätslösungen)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine Viskositätslösung der HJB Gleichung (5.1) mit Randbedingung

$$w(T, x) = w_*(T, x) = w^*(T, x) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{O}.$$

Angenommen, es existiert eine Lyapunov Funktion Ψ für w. Dann ist w stetig und die eindeutige Viskositätslösung der HJB Gleichung in der Menge aller lokal beschränkten Funktionen mit Lyapunov Funktion Ψ, die dieselbe Randbedingung wie w erfüllen.

Existenz einer Lyapunov Funktion

Lemma 5.5 (Existenz einer Lyapunov Funktion)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Angenommen, es existieren Konstanten $K > 0$ und $p \geq 1$ mit

$$0 \leq |w(t,x)|, |f(x,u)| \leq K(1 + |x|^p) \quad \text{für alle } (t,x,u) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \times \mathcal{U}$$

und es gilt

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \big[|b(0,u)| + |\sigma(0,u)| \big] < \infty.$$

Dann existiert eine Lyapunov Funktion für w.

Polynomielles Wachstum der Wertfunktion

Lemma 5.6 (Polynomielles Wachstum der Wertfunktion)

Angenommen, es gilt $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$, es existieren Konstanten $C > 0$ und $p \geq 1$, so dass

$$0 \leq |f(x,u)|, |g(x)| \leq C(1 + |x|^p) \qquad \text{für alle } (x,u) \in \mathcal{O} \times \mathcal{U}$$

und es gilt

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \big[|b(0,u)| + |\sigma(0,u)| \big] < \infty. \tag{5.14}$$

Dann existiert eine Konstante $K > 0$, so dass

$$0 \leq |\mathcal{V}(t,x)| \leq K(1 + |x|^p) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$