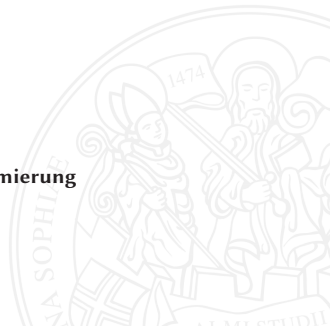


Der Vergleichssatz

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Definition 5.2 (Lyapunov Funktion)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann nennen wir eine nicht-negative, stetige Funktion $\Psi : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty)$ eine **Lyapunov Funktion** für w , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\Psi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$ ist eine strikte Superlösung der HJB Gleichung, d.h. auf jedem Kompaktum $\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ existiert eine Konstante $\kappa > 0$ mit

$$-\partial_t \Psi(t, x) - H(x, D_x \Psi(t, x), D_x^2 \Psi(t, x)) \geq \kappa \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathcal{K}.$$

- (ii) Es existiert eine Konstante $K > 0$, so dass

$$0 \leq |w(t, x)| \leq K(1 + \Psi(t, x)) \quad \text{für alle } (t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$

- (iii) Für alle $t \in \overline{\mathcal{T}}$ und alle Konstanten $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \partial \mathcal{O}} [|w(t, x)| - \varepsilon \Psi(t, x)] = -\infty. \quad (5.2)$$

Theorem 5.3 (Vergleichssatz)

Sei $u : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ eine von oben halbstetige Sublösung der HJB Gleichung (5.1) im Viskositätssinne und sei $v : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ eine von unten halbstetige Superlösung der HJB Gleichung (5.1) im Viskositätssinne. Sei weiter angenommen, es existiert eine gemeinsame Lyapunov Funktion $\Psi : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty)$ für u und v und es gelte

$$u(T, x) \leq v(T, x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{O}. \quad (5.3)$$

Dann gilt $u(t, x) \leq v(t, x)$ für alle $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$.

Korollar 5.4 (Eindeutigkeit von Viskositätslösungen)

Sei $w : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Viskositätslösung der HJB Gleichung (5.1) mit Randbedingung

$$w(T, x) = w_*(T, x) = w^*(T, x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{O}.$$

Angenommen, es existiert eine Lyapunov Funktion Ψ für w . Dann ist w stetig und die eindeutige Viskositätslösung der HJB Gleichung in der Menge aller lokal beschränkten Funktionen mit Lyapunov Funktion Ψ , die dieselbe Randbedingung wie w erfüllen.

Lemma 5.5 (Existenz einer Lyapunov Funktion)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Angenommen, es existieren Konstanten $K > 0$ und $p \geq 1$ mit

$$0 \leq |w(t, x)|, |f(x, u)| \leq K(1 + |x|^p) \quad \text{für alle } (t, x, u) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \times \mathcal{U}$$

und es gilt

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} [|b(0, u)| + |\sigma(0, u)|] < \infty.$$

Dann existiert eine Lyapunov Funktion für w .

Lemma 5.6 (Polynomielles Wachstum der Wertfunktion)

Angenommen, es gilt $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$, es existieren Konstanten $C > 0$ und $p \geq 1$, so dass

$$0 \leq |f(x, u)|, |g(x)| \leq C(1 + |x|^p) \quad \text{für alle } (x, u) \in \mathcal{O} \times \mathcal{U}$$

und es gilt

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} [|b(0, u)| + |\sigma(0, u)|] < \infty. \quad (5.14)$$

Dann existiert eine Konstante $K > 0$, so dass

$$0 \leq |\mathcal{V}(t, x)| \leq K(1 + |x|^p) \quad \text{für alle } (t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$