Universität Trier

Eindeutigkeit und das Lemma von Ishii

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Abschluss der Sub- und Superdifferentiale

Definition 4.10 (Abschluss der Sub- und Superdifferentiale)

Sei $(t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt. Dann definieren wir den Abschluss $\overline{\mathcal{J}}^{2,-} w_*(t,x)$ des Subdifferentials $\mathcal{J}^{2,-} w_*(t,x)$ als die Menge aller $(q,p,M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d\times d}$, für die eine Folge $\{(t_k,x_k,q_k,p_k,M_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(t_k,x_k) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und $(q_k,p_k,M_k) \in \mathcal{J}^{2,-} w_*(t_k,x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, existiert, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \big(t_k, x_k, w_*(t_k,x_k), q_k, p_k, M_k\big) = \big(t, x, w_*(t,x), q, p, M\big).$$

Der Abschluss $\overline{\mathcal{J}}^{2,+} w^*(t,x)$ des Superdifferentials $\mathcal{J}^{2,+} w^*(t,x)$ wird analog definiert.

Abschluss der Sub- und Superdifferentiale

Lemma 4.11 (Abschluss der Sub- und Superdifferentiale)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt.

(i) w ist genau dann eine Sublösung von (4.2) im Viskositätssinne, wenn für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $(q, p, M) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,+} w^*(t, x)$ gilt, dass

$$F\big(t, x, w^*(t, x), q, p, M\big) \leq 0.$$

(ii) w ist genau dann eine Superlösung von (4.2) im Viskositätssinne, wenn für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $(q, p, M) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,-} w_*(t, x)$ gilt, dass

$$F\big(t, x, w_*(t, x), q, p, M\big) \geq 0.$$

Lemma von Ishii

Theorem 4.12 (Lemma von Ishii)

Sei $u : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ halbstetig von oben und $v : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ halbstetig von unten. Seien weiter $\phi \in C^{1,1,2,2}(\mathcal{T}^2 \times \mathcal{O}^2)$ und $(t_0, s_0, x_0, y_0) \in \mathcal{T}^2 \times \mathcal{O}^2$, so dass die Abbildung

$$(t, s, x, y) \mapsto u(t, x) - v(s, y) - \phi(t, s, x, y), \quad (t, s, x, y) \in \mathcal{T}^2 \times \mathcal{O}^2,$$

ein lokales Maximum im Punkt (t_0, s_0, x_0, y_0) annimmt. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Matrizen $M, N \in \mathbb{S}^{d \times d}$, so dass

$$\begin{aligned} \big(\partial_t \phi(t_0, s_0, x_0, y_0), \mathrm{D}_x\, \phi(t_0, s_0, x_0, y_0), M\big) &\in \overline{\mathcal{J}}^{2,+} u(t_0, x_0), \\ \big(-\partial_s \phi(t_0, s_0, x_0, y_0), -\mathrm{D}_y\, \phi(t_0, s_0, x_0, y_0), N\big) &\in \overline{\mathcal{J}}^{2,-} v(s_0, y_0), \end{aligned}$$

und so dass

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -N \end{pmatrix} \leq \mathrm{D}^2_{(x,y)}\, \phi(t_0, s_0, x_0, y_0) + \varepsilon \big(\mathrm{D}^2_{(x,y)}\, \phi(t_0, s_0, x_0, y_0)\big)^2.$$

Lemma von Ishii

Korollar 4.13 (Lemma von Ishii im Spezialfall)

Sei $u : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ halbstetig von oben und $v : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ halbstetig von unten. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(t_0, s_0, x_0, y_0) \in \mathcal{T}^2 \times \mathcal{O}^2$ ein lokales Maximum von

$$(t,s,x,y) \mapsto u(t,x) - v(s,y) - \frac{k}{2}\left[(t-s)^2 + |x-y|^2\right], \quad (t,s,x,y) \in \mathcal{T}^2 \times \mathcal{O}^2.$$

Dann existieren Matrizen $M, N \in \mathbb{S}^{d\times d}$, so dass

$$\big(k(t_0 - s_0), k(x_0 - y_0), M\big) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,+} u(t_0, x_0),$$
$$\big(k(t_0 - s_0), k(x_0 - y_0), N\big) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,-} v(s_0, y_0),$$

und so dass für alle $C, D \in \mathbb{R}^{d\times n}$ gilt

$$\operatorname{tr}\left[CC^\top M - DD^\top N\right] \le 3k|C-D|^2.$$