Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Übungsblatt 4

Abgabe: Dienstag, 24. Januar, 12:00 Uhr, Briefkasten E14.

Aufgabe 1

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass die obere halbstetige Umhüllende $w^* : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ von w mit

$$w^*(t,x) \triangleq \limsup_{(t',x') \to (t,x)} w(t',x'), \qquad (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

die kleinste von oben halbstetige Funktion ist, die w dominiert.

Aufgabe 2

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ halbstetig von oben und $\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ kompakt. Zeigen Sie, dass w ein Maximum auf $\mathcal{K}$ annimmt, d.h. es existiert $(t^*, x^*) \in \mathcal{K}$, so dass

$$w(t^*, x^*) \geq w(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \mathcal{K}.$$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{T} \triangleq [0,2)$, $\mathcal{O} \triangleq \mathbb{R}$ und $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$w(t,x) \triangleq \begin{cases} |t-1|+1, & \text{falls } x = 0, \\ |t-1|, & \text{falls } x \neq 0, \end{cases} \qquad (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$

Bestimmen Sie w_* und w^* sowie die Sub- und Superdifferentiale

$$\mathcal{J}^{2,-} w_*(t,x) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{J}^{2,+} w^*(t,x), \qquad (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}.$$

Aufgabe 4

Sei $w : \mathcal{T} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt und $(t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{J}^{2,+} w^*(t,x)$ konvex ist und dass für alle $(p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ die Menge

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^{d \times d} : (q,p,X) \in \mathcal{J}^{2,+} w^*(t,x) \right\}$$

abgeschlossen ist.