Universität Trier

Das Gesetz der großen Zahlen

Tutorium Stochastische Prozesse
31. Januar 2017

Lévy's Upward-Downward Theorem

Lévy's Upward-Downward Theorem

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{T}$ abzählbar und $Z \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$.

- Falls $\inf\mathcal{T} \notin \mathcal{T}$, so gilt

$$\mathrm{E}[Z|\mathfrak{F}(t)] \to \mathrm{E}[Z|\mathfrak{F}(\inf\mathcal{T})] \quad \text{f.s. und in } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}) \text{ für } t \downarrow \inf\mathcal{T}.$$

- Falls $\sup\mathcal{T} \notin \mathcal{T}$, so gilt

$$\mathrm{E}[Z|\mathfrak{F}(t)] \to \mathrm{E}[Z|\mathfrak{F}(\sup\mathcal{T})] \quad \text{f.s. und in } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}) \text{ für } t \uparrow \inf\mathcal{T}.$$

Kolmogorov's 0/1-Gesetz

Kolmogorov's 0/1-Gesetz

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen. Definiere

$$\mathfrak{T}(\infty) \triangleq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\big(X_k : k \geq n\big).$$

Ist $Z \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ eine $\mathfrak{T}(\infty)$-messbare Zufallsvariable, so gilt $Z = \mathrm{E}[Z]$ f.s.

Kolmogorov's 0/1-Gesetz

Kolmogorov's 0/1-Gesetz

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen. Definiere

$$\mathfrak{T}(\infty) \triangleq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\big(X_k : k \geq n\big).$$

Ist $Z \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$ eine $\mathfrak{T}(\infty)$-messbare Zufallsvariable, so gilt $Z = \mathrm{E}[Z]$ f.s.

Bemerkung: Für $A \in \mathfrak{T}(\infty)$ sei $Z \triangleq \mathbb{1}_A$. Dann folgt

$$\mathbb{1}_A = Z = \mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A] \quad \text{f.s.},$$

also $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

Das Gesetz der großen Zahlen

Das Gesetz der großen Zahlen

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{P})$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathrm{E}[X_1] \quad \text{f.s. und in } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}) \text{ für } n \to \infty.$$