

Das Gesetz der großen Zahlen

Tutorium Stochastische Prozesse
31. Januar 2017



Lévy's Upward-Downward Theorem

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, \mathcal{T} abzählbar und $Z \in L^1(\mathbb{P})$.

- Falls $\inf \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$, so gilt

$$E[Z|\mathfrak{F}(t)] \rightarrow E[Z|\mathfrak{F}(\inf \mathcal{T})] \quad \text{f.s. und in } L^1(\mathbb{P}) \text{ für } t \downarrow \inf \mathcal{T}.$$

- Falls $\sup \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$, so gilt

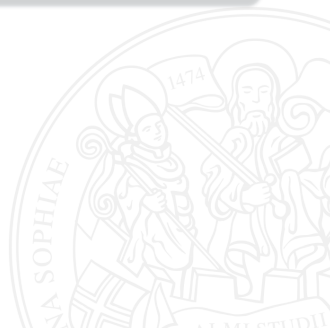
$$E[Z|\mathfrak{F}(t)] \rightarrow E[Z|\mathfrak{F}(\sup \mathcal{T})] \quad \text{f.s. und in } L^1(\mathbb{P}) \text{ für } t \uparrow \sup \mathcal{T}.$$

Kolmogorov's 0/1-Gesetz

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen. Definiere

$$\mathfrak{T}(\infty) \triangleq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_k : k \geq n).$$

Ist $Z \in L^1(\mathbb{P})$ eine $\mathfrak{T}(\infty)$ -messbare Zufallsvariable, so gilt $Z = \mathbb{E}[Z]$ f.s.



Kolmogorov's 0/1-Gesetz

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen. Definiere

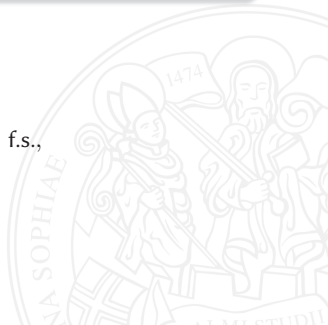
$$\mathfrak{T}(\infty) \triangleq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_k : k \geq n).$$

Ist $Z \in L^1(\mathbb{P})$ eine $\mathfrak{T}(\infty)$ -messbare Zufallsvariable, so gilt $Z = \mathbb{E}[Z]$ f.s.

Bemerkung: Für $A \in \mathfrak{T}(\infty)$ sei $Z \triangleq \mathbb{1}_A$. Dann folgt

$$\mathbb{1}_A = Z = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A] \quad \text{f.s.,}$$

also $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.



Das Gesetz der großen Zahlen

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \in L^1(\mathbb{P})$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow \mathbb{E}[X_1] \quad \text{f.s. und in } L^1(\mathbb{P}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

