

Gleichgradige Integrierbarkeit und der Satz von Vitali

Tutorium Stochastische Prozesse
24. Januar 2017



Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen wir verschiedene Formen der **Konvergenz von Zufallsvariablen**:



Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen wir verschiedene Formen der **Konvergenz von Zufallsvariablen**:

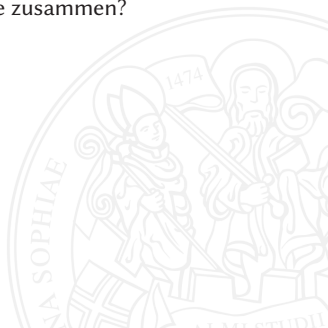
- (1) Konvergenz in Verteilung
- (2) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
- (3) Fast sichere Konvergenz
- (4) Konvergenz im Erwartungswert



Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen wir verschiedene Formen der **Konvergenz von Zufallsvariablen**:

- (1) Konvergenz in Verteilung
- (2) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
- (3) Fast sichere Konvergenz
- (4) Konvergenz im Erwartungswert

Frage: Wie hängen die verschiedenen Konvergenzbegriffe zusammen?



Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen wir verschiedene Formen der **Konvergenz von Zufallsvariablen**:

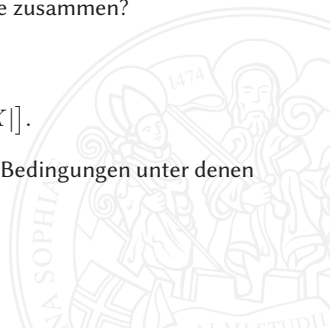
- (1) Konvergenz in Verteilung
- (2) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
- (3) Fast sichere Konvergenz
- (4) Konvergenz im Erwartungswert

Frage: Wie hängen die verschiedenen Konvergenzbegriffe zusammen?

Aus der Markov Ungleichung folgt sofort (4) \Rightarrow (2), da

$$\mathbb{P}[|X_n - X| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[|X_n - X|].$$

Der **Satz von Vitali** liefert notwendige und hinreichende Bedingungen unter denen auch (2) \Rightarrow (4) gilt.



Definition (Gleichgradig Integrierbar)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ heißt **gleichgradig integrierbar** oder kurz **u.i.** (uniformly integrable), falls

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| > \alpha\}}] = 0.$$



Definition (Gleichgradig Integrierbar)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ heißt **gleichgradig integrierbar** oder kurz **u.i.** (uniformly integrable), falls

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| > \alpha\}}] = 0.$$

Theorem (Satz von Vitali)

Seien X, X_1, X_2, \dots Zufallsvariablen. Dann sind äquivalent:

- (i) $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ für alle n und $X_n \rightarrow X$ im Erwartungswert.
- (ii) Die Familie $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist u.i. und $X_n \rightarrow X$ in Wahrscheinlichkeit.

Lemma (Äquikontinuitätskriterium)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ist genau dann u.i., wenn

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[|X_i|] < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{A \in \mathfrak{A}, \mathbb{P}[A] < \delta} \sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] = 0.$$



Kriterien für gleichgradige Integrierbarkeit

Lemma (Äquikontinuitätskriterium)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ist genau dann u.i., wenn

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[|X_i|] < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{A \in \mathfrak{A}, \mathbb{P}[A] < \delta} \sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[|X_i| \mathbf{1}_A] = 0.$$

Lemma (L^p -Beschränktheit)

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ist u.i., falls ein $p > 1$ existiert, so dass

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}[|X_i|^p] < \infty.$$

Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

(i) **Einelementige Familien:** $\{X\}$ ist u.i. falls $E[|X|] < \infty$.



Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

- (i) **Einelementige Familien:** $\{X\}$ ist u.i. falls $E[|X|] < \infty$.
- (ii) **Dominierte Familien:** Existiert eine Zufallsvariable Y mit $E[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ u.i.



Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

- (i) **Einelementige Familien:** $\{X\}$ ist u.i. falls $E[|X|] < \infty$.
- (ii) **Dominierte Familien:** Existiert eine Zufallsvariable Y mit $E[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ u.i.
- (iii) **Stochastische Prozesse:** Ein Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ist u.i. falls

$$E\left[\sup_{t \in \mathcal{T}} |X(t)|\right] < \infty.$$



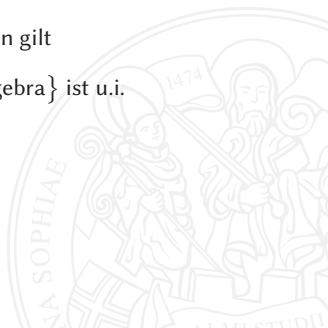
Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

- (i) **Einelementige Familien:** $\{X\}$ ist u.i. falls $E[|X|] < \infty$.
- (ii) **Dominierte Familien:** Existiert eine Zufallsvariable Y mit $E[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ u.i.
- (iii) **Stochastische Prozesse:** Ein Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ist u.i. falls

$$E\left[\sup_{t \in \mathcal{T}} |X(t)|\right] < \infty.$$

- (iv) **Bedingte Erwartungswerte:** Sei $E[|X|] < \infty$. Dann gilt

die Familie $\{E[X|\mathfrak{F}] : \mathfrak{F} \subset \mathfrak{A} \text{ Teil-}\sigma\text{-Algebra}\}$ ist u.i.



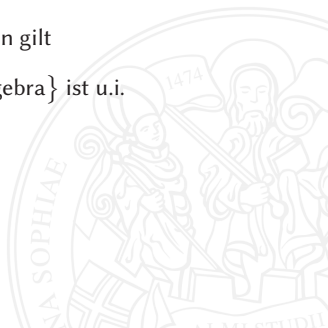
Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

- (i) **Einelementige Familien:** $\{X\}$ ist u.i. falls $E[|X|] < \infty$.
- (ii) **Dominierte Familien:** Existiert eine Zufallsvariable Y mit $E[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ u.i.
- (iii) **Stochastische Prozesse:** Ein Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ist u.i. falls

$$E\left[\sup_{t \in \mathcal{T}} |X(t)|\right] < \infty.$$

- (iv) **Bedingte Erwartungswerte:** Sei $E[|X|] < \infty$. Dann gilt

die Familie $\{E[X|\mathfrak{F}] : \mathfrak{F} \subset \mathfrak{A} \text{ Teil-}\sigma\text{-Algebra}\}$ ist u.i.



Beispiele für gleichgradige Integrierbarkeit:

- (i) **Einelementige Familien:** $\{X\}$ ist u.i. falls $E[|X|] < \infty$.
- (ii) **Dominierte Familien:** Existiert eine Zufallsvariable Y mit $E[|Y|] < \infty$ und $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in \mathcal{I}$, dann ist $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ u.i.
- (iii) **Stochastische Prozesse:** Ein Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ist u.i. falls

$$E\left[\sup_{t \in \mathcal{T}} |X(t)|\right] < \infty.$$

- (iv) **Bedingte Erwartungswerte:** Sei $E[|X|] < \infty$. Dann gilt

die Familie $\{E[X|\mathfrak{F}] : \mathfrak{F} \subset \mathfrak{A} \text{ Teil-}\sigma\text{-Algebra}\}$ ist u.i.

- (v) **Gegenbeispiel:** Das Martingal aus Aufgabe 4 auf Übungsblatt 10 ist nicht u.i.

