Universität Trier

Das Sekretärinnenproblem

Tutorium Stochastische Prozesse
10. Januar 2017

Optimales Stoppen

Sei $X = \{X(t)\}_{t=1,\ldots,N}$ ein $\mathbb{R}$-wertiger, adaptierter Prozess mit $\mathrm{E}[|X(t)|] < \infty$ für alle $t \in \{1, \ldots, N\}$. Weiter sei Θ die Menge aller Stoppzeiten $\tau : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$.

Das **Optimale Stoppproblem** ist gegeben als

$$\sup_{\tau \in \Theta} \mathrm{E}[X(\tau)].$$

Einfache Sonderfälle

Frage: Wenn X ein Supermartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort:

Frage: Wenn X ein Submartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort:

Frage: Wenn X ein Martingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort:

Einfache Sonderfälle

Frage: Wenn X ein Supermartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort: Stoppe sofort: $\tau \equiv 1$.

Frage: Wenn X ein Submartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort: Stoppe am Ende: $\tau \equiv N$.

Frage: Wenn X ein Martingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort: Jede Stoppzeit ist optimal.

Lösung mittels Snell-Umhüllender

Definiere einen Prozess $Z = \{Z(t)\}_{t=1,\dots,N}$ durch

$$\begin{aligned} Z(N) &\triangleq X(N), \\ Z(t) &\triangleq X(t) \vee \mathrm{E}[Z(t+1)|\mathfrak{F}(t)], \qquad\qquad t = N-1,\dots,1. \end{aligned}$$

Eine **optimale Stoppzeit** ist dann

$$\tau^* \triangleq \min\{t = 1,\dots,N : Z(t) = X(t)\}$$

Wir nennen Z die **Snell-Umhüllende** von X, das kleinste Supermartingal größer als X. Es gilt, dass $Z(\cdot \wedge \tau^*)$ ein Martingal ist.

Das Sekretärinnenproblem

Das Sekretärinnenproblem:

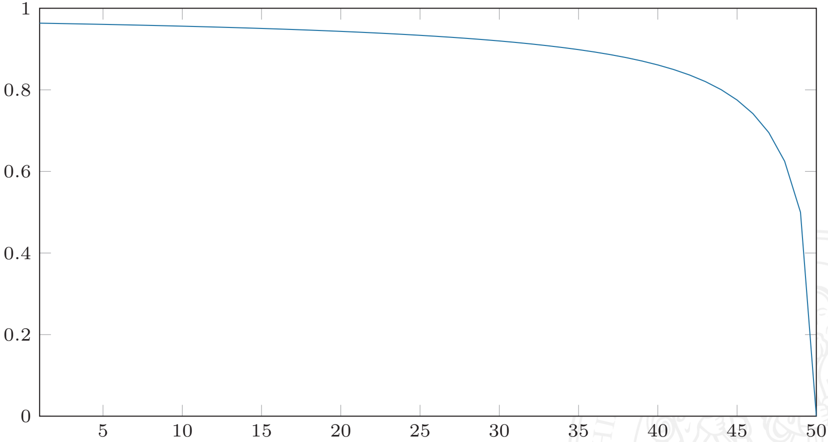
- Angenommen, Sie müssen eine von N Sekretärinnen einstellen.
- Sie müssen direkt nach dem Vorstellungsgespräch entscheiden, ob der/die Bewerber/in die Stelle erhält.
- Die Qualifikation des/der n-ten Bewerbers/Bewerberin ist $X(n)$.
- $X(1), \ldots, X(n)$ sind unabhängig identisch verteilt und $X(1)$ ist uniform auf $[0, 1]$-verteilt.
- Ziel: Stelle den besten Bewerber / die beste Bewerberin ein.

Wir stehen also vor dem **Stoppproblem**

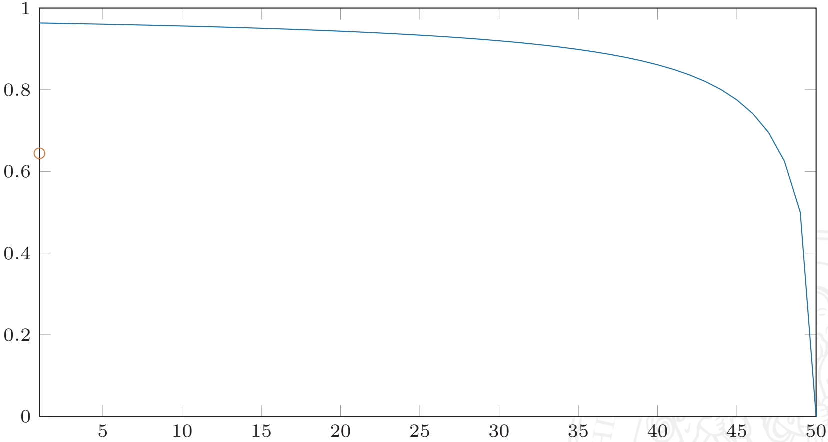
$$\sup_{\tau \in \Theta} \mathrm{E}\big[X(\tau)\big].$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die optimale Strategie!

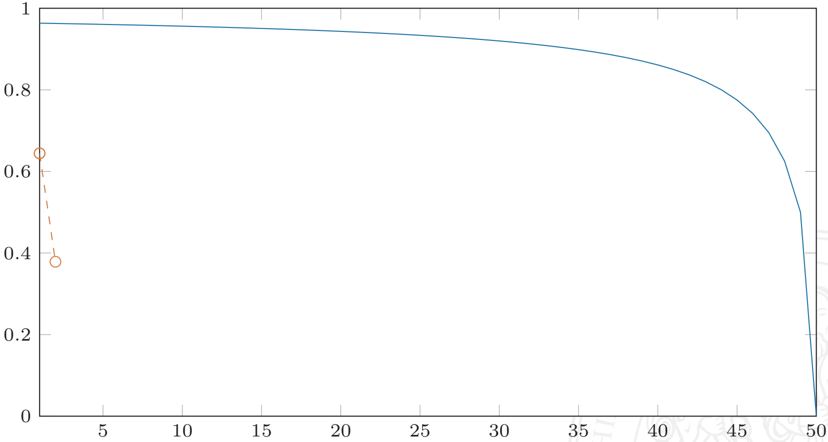
Numerisches Beispiel



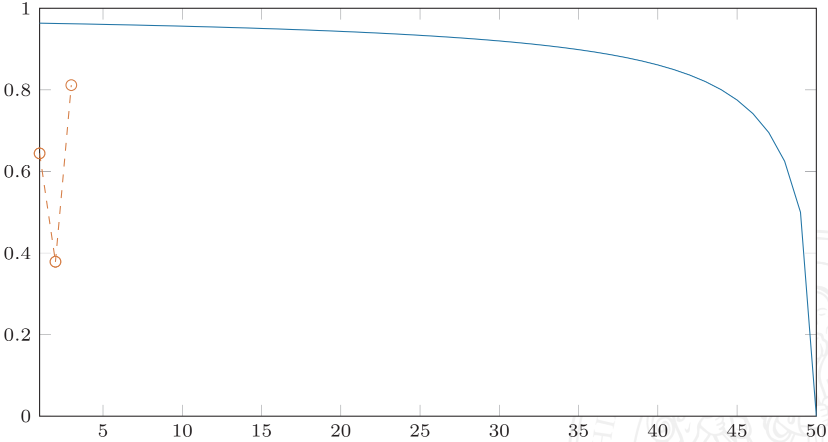
Numerisches Beispiel



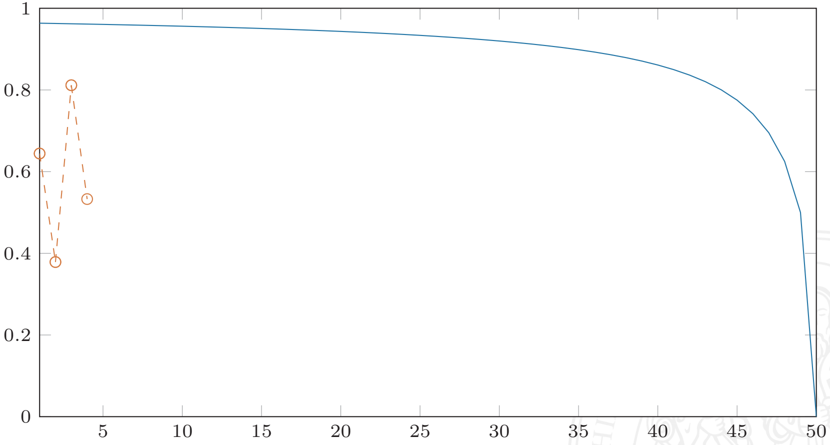
Numerisches Beispiel



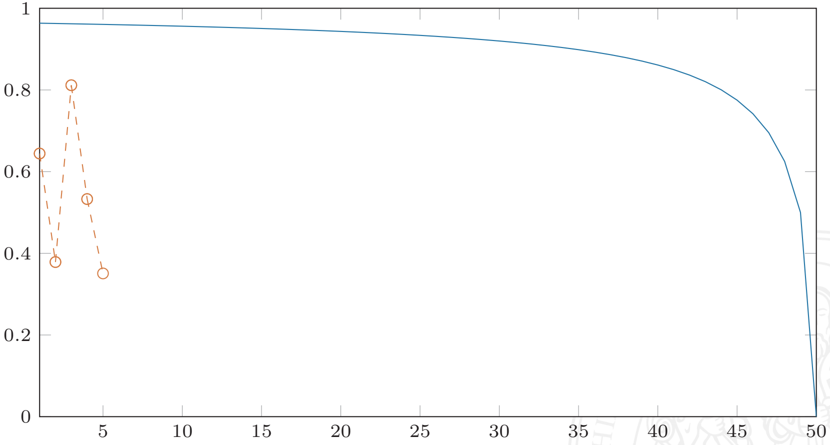
Numerisches Beispiel



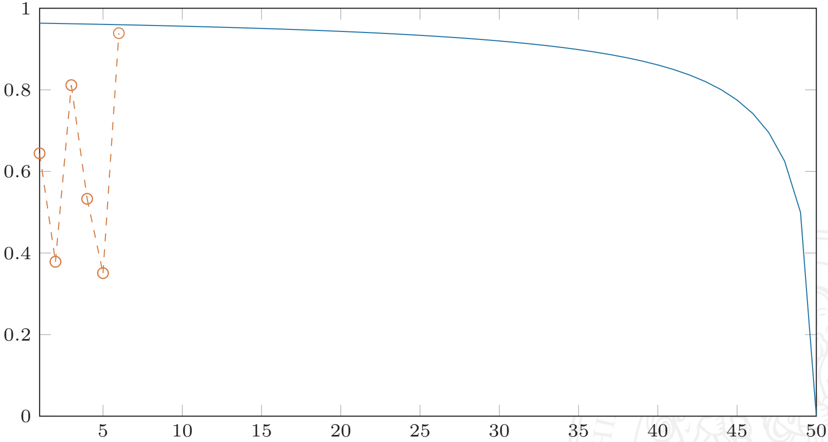
Numerisches Beispiel



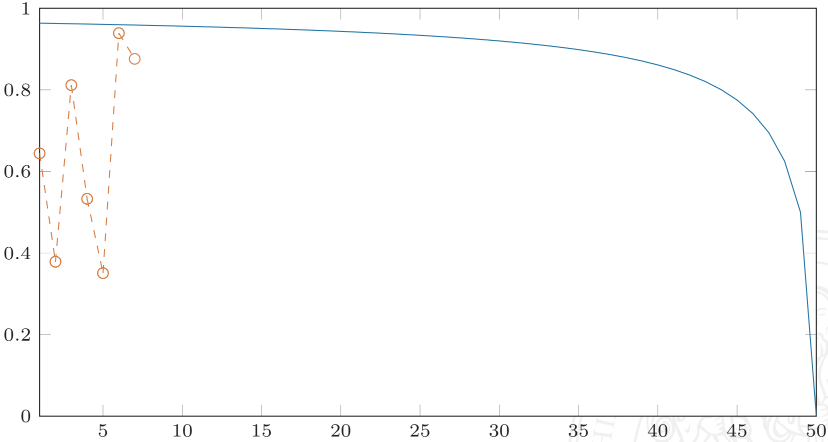
Numerisches Beispiel



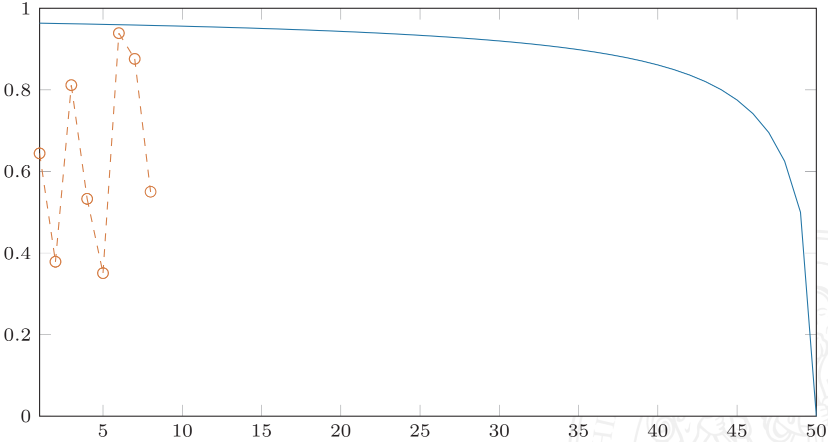
Numerisches Beispiel



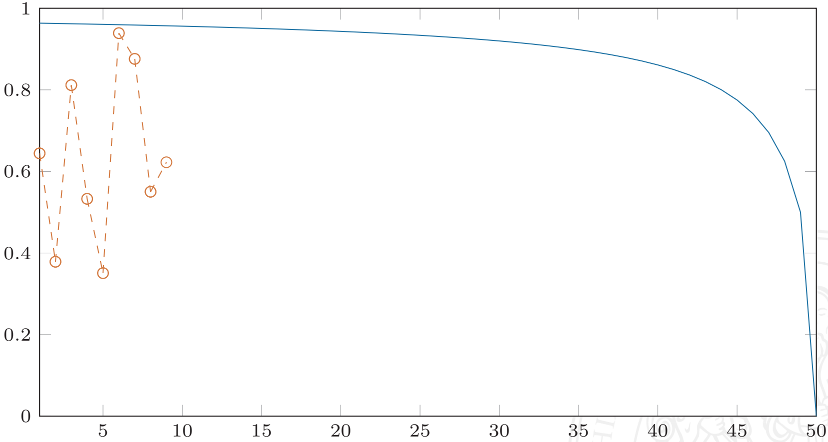
Numerisches Beispiel



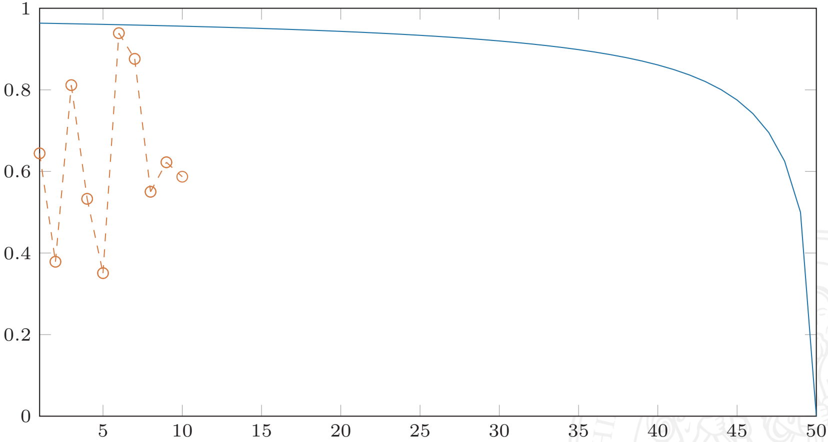
Numerisches Beispiel



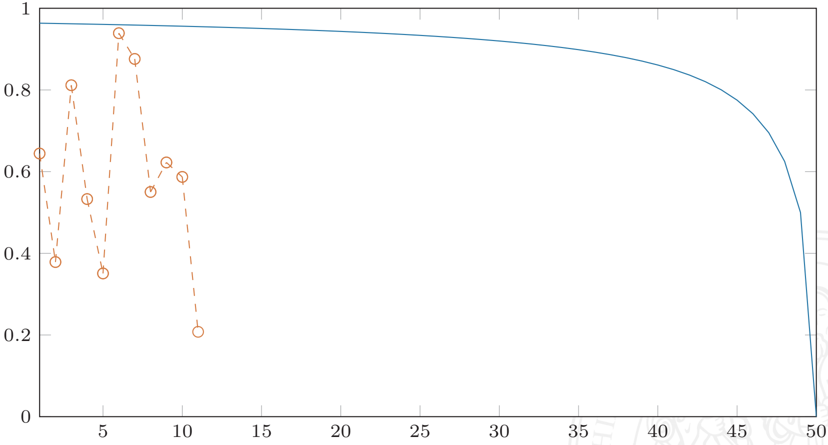
Numerisches Beispiel



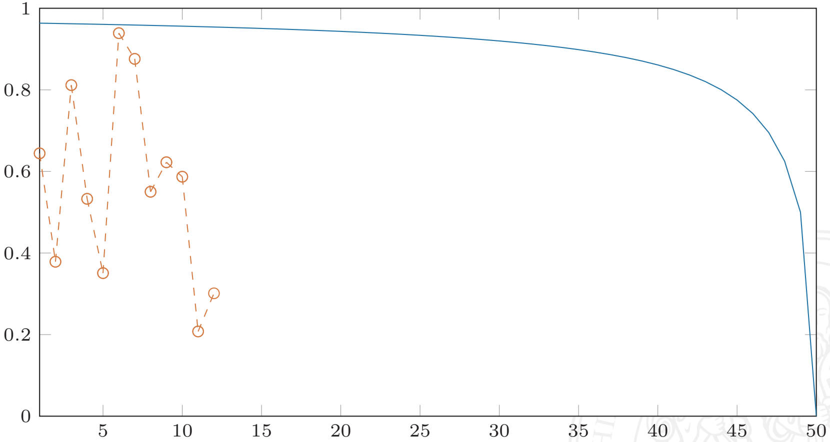
Numerisches Beispiel



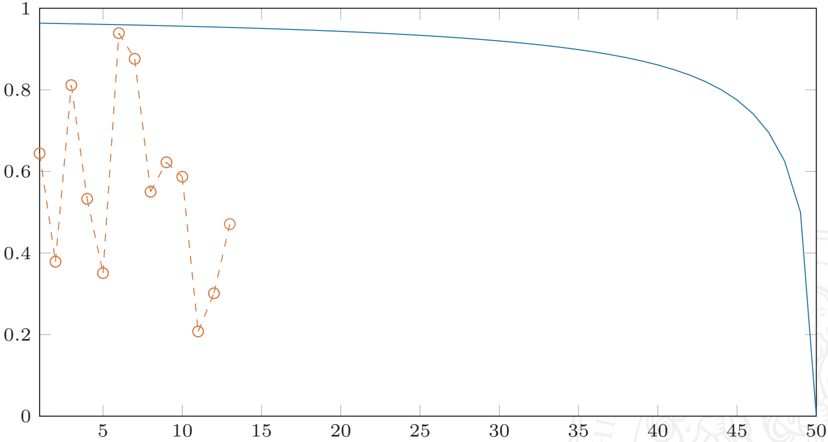
Numerisches Beispiel



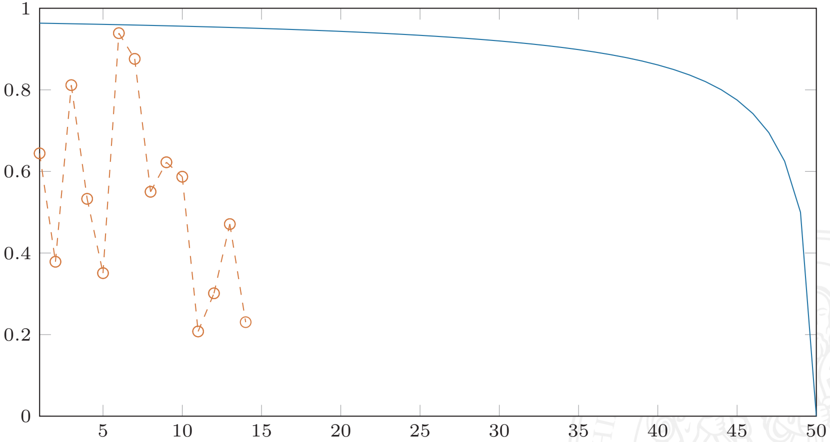
Numerisches Beispiel



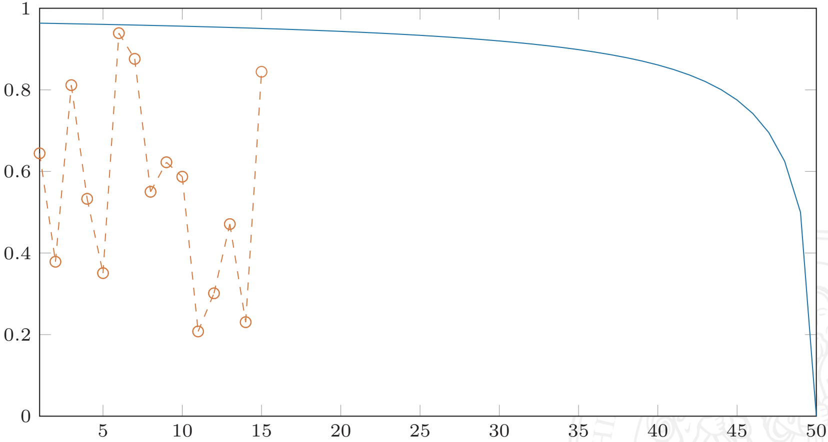
Numerisches Beispiel



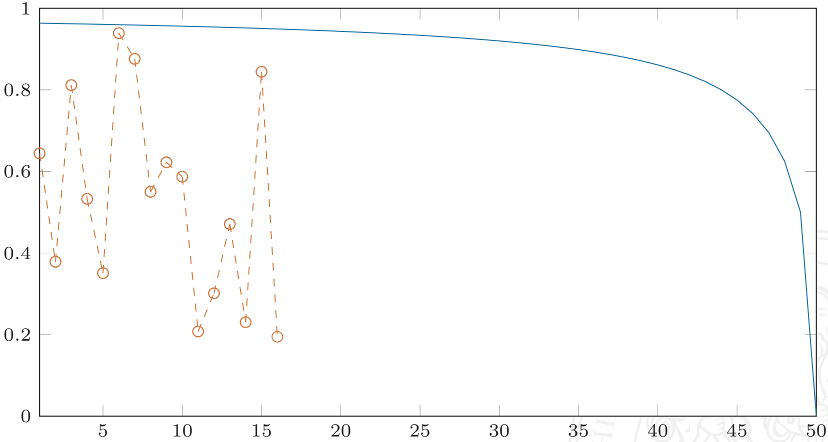
Numerisches Beispiel



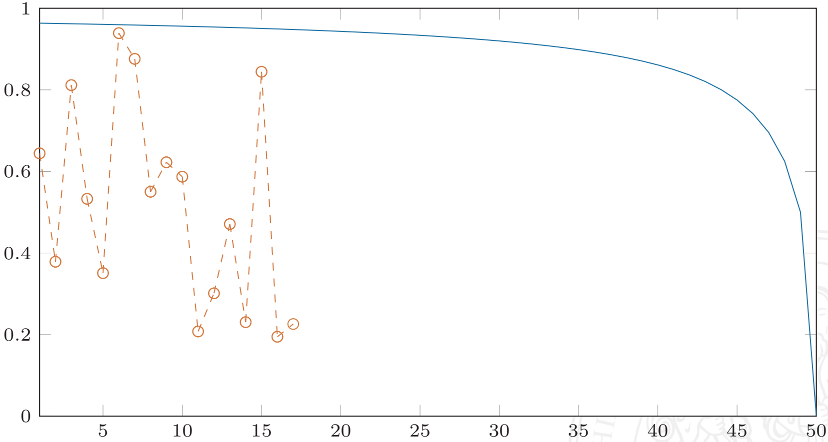
Numerisches Beispiel



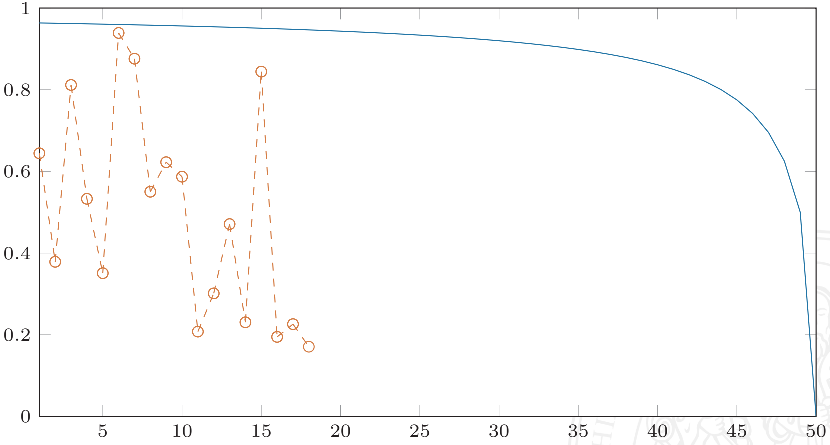
Numerisches Beispiel



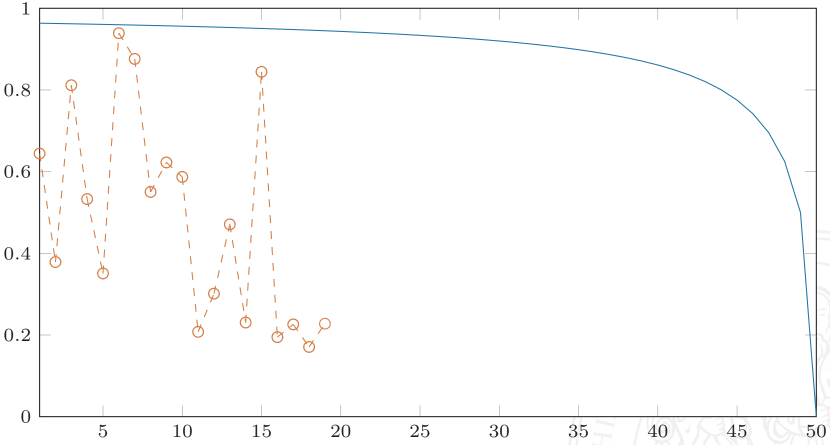
Numerisches Beispiel



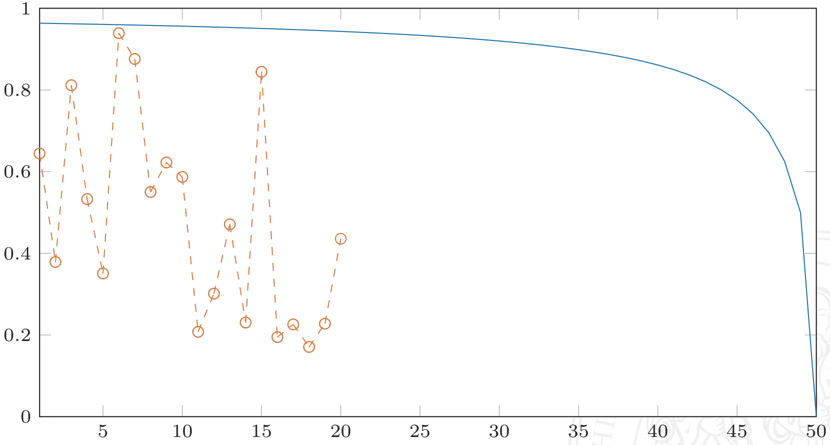
Numerisches Beispiel



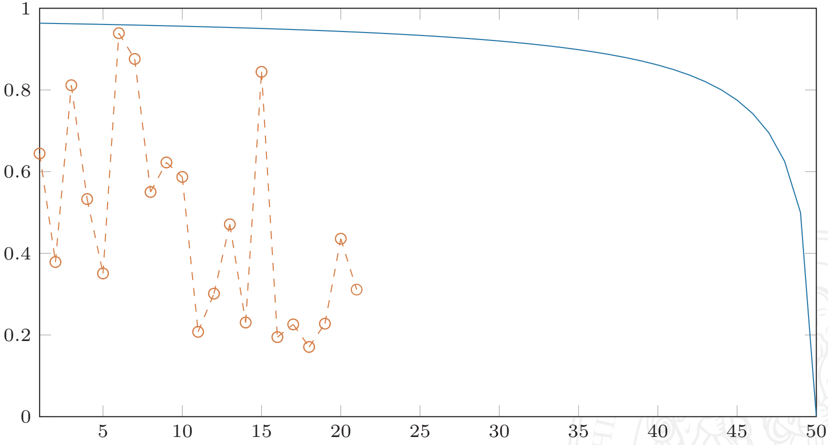
Numerisches Beispiel



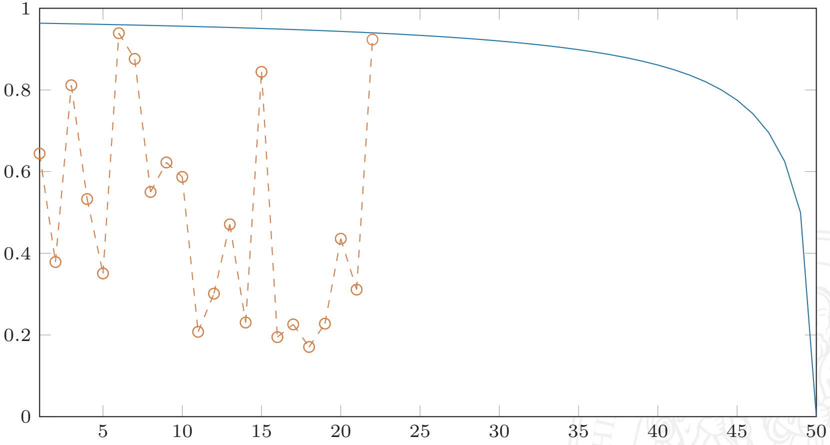
Numerisches Beispiel



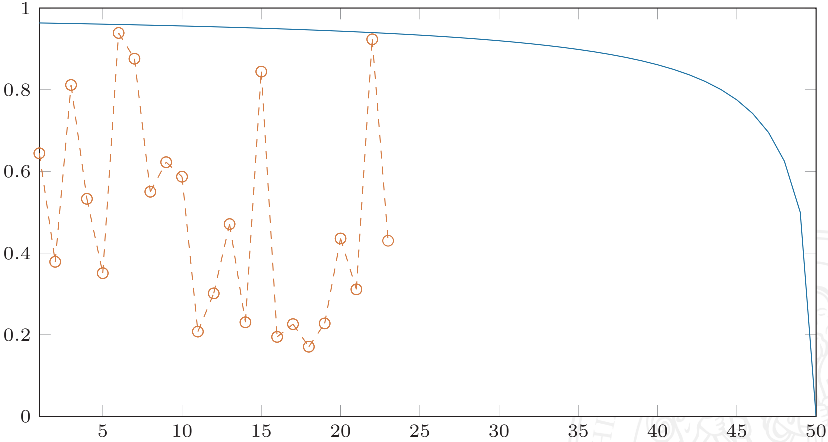
Numerisches Beispiel



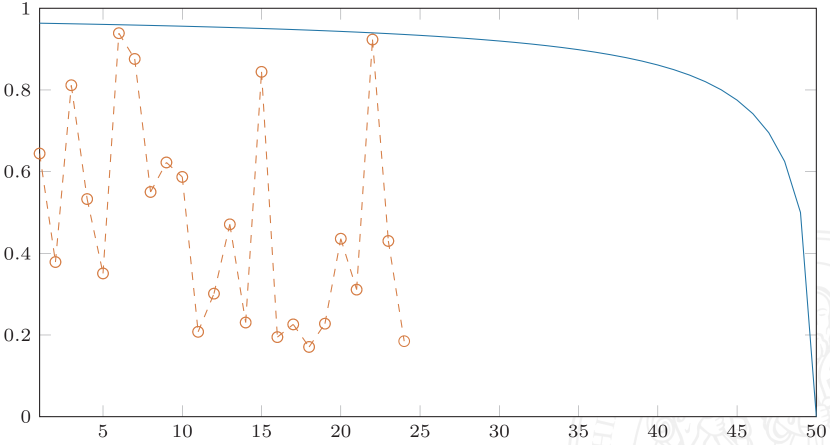
Numerisches Beispiel



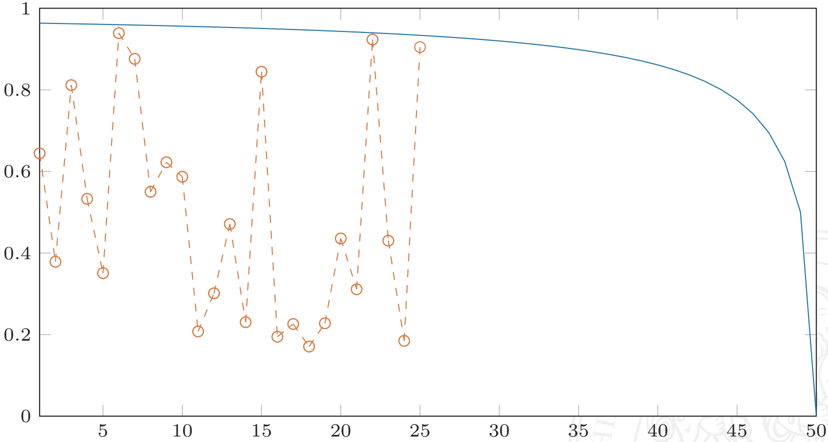
Numerisches Beispiel



Numerisches Beispiel



Numerisches Beispiel



Numerisches Beispiel