Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Universität Trier
Wintersemester 2016/17

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, 02. Februar, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein rechtsstetiger, adaptierter Prozess. Zeigen Sie, dass X genau dann ein Submartingal ist, wenn

$$\mathbb{E}[X(\sigma)] \leq \mathbb{E}[X(\tau)] \qquad \text{für alle beschränkten Stoppzeiten } \sigma \leq \tau.$$

Folgern Sie, dass X genau dann ein Martingal ist, wenn

$$\mathbb{E}[X(\tau)] = \mathbb{E}[X(0)] \qquad \text{für alle beschränkten Stoppzeiten } \tau.$$

Aufgabe 2
Sei W eine Brownsche Bewegung und $\alpha > 0$. Definiere

$$\tau_\alpha \triangleq \inf\{t \geq 0 : W(t) = \alpha\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left[e^{-y\tau_\alpha}\right] = e^{-\alpha\sqrt{2y}} \qquad \text{für alle } y \in [0,\infty)$$

und $\tau_\alpha < \infty$ fast sicher.
Hinweis: In Aufgabe 2 auf Übungsblatt 9 haben wir bewiesen, dass der Prozess

$$\left\{e^{-\frac{\theta^2}{2}t+\theta W(t)}\right\}_{t\in[0,\infty)}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ ein Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^W$ ist.

Aufgabe 3
Sei W eine Brownsche Bewegung und $\alpha < 0 < \beta$. Definiere

$$\tau_\alpha \triangleq \inf\{t \geq 0 : W(t) = \alpha\} \qquad \text{und} \qquad \tau_\beta \triangleq \inf\{t \geq 0 : W(t) = \beta\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[\tau_\alpha \leq \tau_\beta] = \tfrac{\beta}{\beta-\alpha} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}[\tau_\alpha > \tau_\beta] = \tfrac{-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass jeder beschränkte, adaptierte, rechtsstetige Prozess, jedes rechtsstetige, nichtnegative Submartingal und jedes rechtsstetige Martingal zur Klasse (DL) gehört.