Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 11

Abgabe: Donnerstag, 26. Januar, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein adaptierter Prozess und $H = \{H(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar, d.h. $H(t)$ ist $\mathfrak{F}(t-1)$-messbar für alle $t \in \mathbb{N}$. Wir definieren das (diskrete) stochastische Integral von H bezüglich X als den Prozess $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$Y(t) \triangleq \textstyle\sum_{s=1}^{t} H(s)\big[X(s) - X(s-1)\big] \text{ für alle } t \in \mathbb{N}_0$$

und wir schreiben $H \bullet X = \{H \bullet X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$, $H \bullet X(t) \triangleq Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, dass $H \bullet X$ ein Martingal ist, falls X ein Martingal und H beschränkt und vorhersagbar ist.

(b) Seien σ und τ Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$ und $F \in \mathfrak{F}(\sigma)$. Konstruieren Sie einen beschränkten vorhersagbaren Prozess H, so dass

$$H \bullet X = 1_F\big[X(\cdot \wedge \tau) - X(\cdot \wedge \sigma)\big].$$

(c) Verwenden Sie (a) und (b) um den Optional Stopping Satz für Martingale zu beweisen, ohne dabei Theorem 29 zu verwenden: Sind σ und τ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$, dann gilt

$$\mathbb{E}[X(\tau)|\mathfrak{F}(\sigma)] = X(\sigma) \text{ a.s.}$$

Aufgabe 2
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein stetiger, reellwertiger Prozess. Angenommen, es existiert eine Folge $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass gilt:

$$X(\cdot \wedge \tau_n) \text{ ist ein Martingal für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \tau_n \uparrow \infty \text{ a.s.}$$

Einen Prozess mit dieser Eigenschaft nennen wir ein *lokales Martingal*.

(a) Zeigen Sie, dass X ein Martingal ist, falls $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|] < \infty$ für alle $T > 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass X ein Supermartingal ist, falls eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $X(t) \geq K$ a.s. für alle $t \in [0, \infty)$.

Aufgabe 3 (freiwillige Abgabe)
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein stetiger, adaptierter, reellwertiger Prozess. Zeigen Sie, dass X lokal beschränkt ist, d.h. es existieren Stoppzeiten τ_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\tau_n \to \infty$, so dass $X(\cdot \wedge \tau_n)$ gleichmäßig beschränkt ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (freiwillige Abgabe)
Sei W eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log(t)}} = -1 \quad \text{und} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log(t)}} = 1 \text{ a.s.}$$