Stochastische Prozesse

Übungsblatt 10

Abgabe: Donnerstag, 19. Januar, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein Submartingal und seien σ und τ Stoppzeiten mit endlichem Wertebereich $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass

$$X(\sigma \wedge \tau) \leq \mathbb{E}[X(\tau)|\mathfrak{F}(\sigma)] \text{ fast sicher.}$$

Aufgabe 2

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit Parametern $\kappa, \sigma > 0$ und $Y = \{Y(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ der zugehörige Langevin Prozess, d.h.

$$Y(t) \triangleq \int_0^t X(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle } t \in [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass X und Y keine Martingale sind.

Aufgabe 3

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Brücke.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X(s)] = \mathbb{E}[X(t)]$ für alle $s, t \in [0,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass X kein Martingal ist.

Aufgabe 4

Sei $\Omega \triangleq [0,1]$, $\mathfrak{A}$ die Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$ und $\mathbb{P}$ das Lebesgue Maß auf $[0,1]$. Definiere einen Prozess $X = \{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$X(n,\omega) = \begin{cases} 2^n & \text{falls } \omega \in [0, 2^{-n}] \\ 0 & \text{falls } \omega \in (2^{-n}, 1] \end{cases} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass X ein Martingal bezüglich $\mathfrak{F}^X$ ist, dass aber $\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} X(n)] = \infty$.