Universität Trier

Sub- und Superdifferentiale

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Zielsetzung dieses Abschnitts

Zielsetzung für diesen Abschnitt:

(1) Sie wissen, worum es sich bei Sub- und Superdifferentialen handelt.

(2) Sie kennen den Zusammenhang zwischen Sub- und Superdifferentialen und Ableitungen einer Funktion.

(3) Sie kennen den Zusammenhang zwischen Sub- und Superdifferentialen und Testfunktionen für Viskositätslösungen.

(4) Sie können Viskositätslösungen über Sub- und Superdifferentiale definieren.

(5) Sie können in konkreten Beispielen Sub- und Superdifferentiale bestimmen.

Sub- und Superdifferentiale

Definition 4.6 (Sub- und Superdifferentiale)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt und $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$.

(i) Das **Subdifferential** $\mathcal{J}^{2,-} w_*(t_0, x_0)$ von w_* im Punkt (t_0, x_0) ist definiert als die Menge aller $(q, p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d \times d}$ mit

$$\begin{aligned} w_*(t,x) \geq{}& w_*(t_0,x_0) + q(t-t_0) + p^\top(x-x_0) \\ &+ \tfrac{1}{2}(x-x_0)^\top M(x-x_0) + o\big(|t-t_0| + |x-x_0|^2\big). \end{aligned}$$

(ii) Das **Superdifferential** $\mathcal{J}^{2,+} w^*(t_0, x_0)$ von w^* im Punkt (t_0, x_0) ist definiert als die Menge aller $(q, p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d \times d}$ mit

$$\begin{aligned} w^*(t,x) \leq{}& w^*(t_0,x_0) + q(t-t_0) + p^\top(x-x_0) \\ &+ \tfrac{1}{2}(x-x_0)^\top M(x-x_0) + o\big(|t-t_0| + |x-x_0|^2\big). \end{aligned}$$

Sub- und Superdifferentiale mittels Taylorentwicklung

Lemma 4.7 (Sub- und Superdifferentiale mittels Taylorentwicklung)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$. Angenommen, es existiert eine Taylorentwicklung von w um den Punkt (t_0, x_0), d.h. es existiert $(q, p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d\times d}$ mit

$$\begin{aligned} w(t,x) = w(t_0,x_0) &+ q(t-t_0) + p^\top(x-x_0) \\ &+ \tfrac{1}{2}(x-x_0)^\top M(x-x_0) + o\big(|t-t_0| + |x-x_0|^2\big). \end{aligned}$$

Dann gilt, im Fall $t_0 > 0$, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{2,-}w(t_0,x_0) &= \big\{(q,p,M-A) : A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d\times d}\big\}, \\ \mathcal{J}^{2,+}w(t_0,x_0) &= \big\{(q,p,M+A) : A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d\times d}\big\}, \end{aligned}$$

und falls $t_0 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{2,-}w(t_0,x_0) &= \big\{(q-a,p,M-A) : a \in [0,\infty),\ A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d\times d}\big\}, \\ \mathcal{J}^{2,+}w(t_0,x_0) &= \big\{(q+a,p,M+A) : a \in [0,\infty),\ A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d\times d}\big\}. \end{aligned}$$

Testfunktionen vs. Sub- und Superdifferentiale

Lemma 4.8 (Testfunktionen vs. Sub- und Superdifferentiale)

Es sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt und $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{2,-} w_*(t_0, x_0) = \Big\{ \big(\partial_t \varphi(t_0, x_0), \mathrm{D}_x\, \varphi(t_0, x_0), \mathrm{D}_x^2\, \varphi(t_0, x_0)\big) :& \\ \varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}), \varphi \le w_*, \varphi(t_0, x_0) = w_*(t_0, x_0)\Big\}&,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{2,+} w^*(t_0, x_0) = \Big\{ \big(\partial_t \varphi(t_0, x_0), \mathrm{D}_x\, \varphi(t_0, x_0), \mathrm{D}_x^2\, \varphi(t_0, x_0)\big) :& \\ \varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}), \varphi \ge w^*, \varphi(t_0, x_0) = w^*(t_0, x_0)\Big\}&.\end{aligned}$$

Definition 4.9 (Viskositätslösung)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt.

(i) w heißt **Sublösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $(q, p, M) \in \mathcal{J}^{2,+} w^*(t, x)$ gilt, dass

$$F\big(t, x, w^*(t, x), q, p, M\big) \leq 0.$$

(ii) w heißt **Superlösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $(q, p, M) \in \mathcal{J}^{2,-} w_*(t, x)$ gilt, dass

$$F\big(t, x, w_*(t, x), q, p, M\big) \geq 0.$$

(iii) w heißt **Viskositätslösung** der PDE (4.2), falls w sowohl eine Sub- als auch eine Superlösung der PDE (4.2) im Viskositätssinne ist.

Beispiel für Sub- und Superdifferentiale