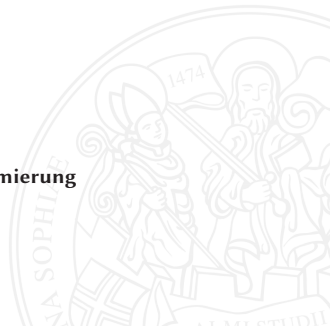


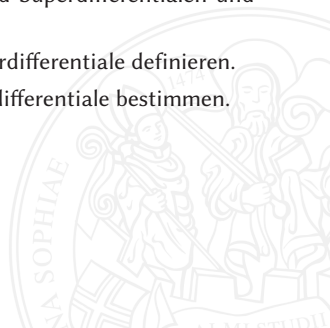
Sub- und Superdifferentialle

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Zielsetzung für diesen Abschnitt:

- (1) Sie wissen, worum es sich bei Sub- und Superdifferentialen handelt.
- (2) Sie kennen den Zusammenhang zwischen Sub- und Superdifferentialen und Ableitungen einer Funktion.
- (3) Sie kennen den Zusammenhang zwischen Sub- und Superdifferentialen und Testfunktionen für Viskositätslösungen.
- (4) Sie können Viskositätslösungen über Sub- und Superdifferentialie definieren.
- (5) Sie können in konkreten Beispielen Sub- und Superdifferentialie bestimmen.



Definition 4.6 (Sub- und Superdifferenziale)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal beschränkt und $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$.

- (i) Das **Subdifferential** $\mathcal{J}^{2,-} w_*(t_0, x_0)$ von w_* im Punkt (t_0, x_0) ist definiert als die Menge aller $(q, p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d \times d}$ mit

$$w_*(t, x) \geq w_*(t_0, x_0) + q(t - t_0) + p^\top(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top M(x - x_0) + o(|t - t_0| + |x - x_0|^2).$$

- (ii) Das **Superdifferential** $\mathcal{J}^{2,+} w^*(t_0, x_0)$ von w^* im Punkt (t_0, x_0) ist definiert als die Menge aller $(q, p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d \times d}$ mit

$$w^*(t, x) \leq w^*(t_0, x_0) + q(t - t_0) + p^\top(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top M(x - x_0) + o(|t - t_0| + |x - x_0|^2).$$

Sub- und Superdifferenziale mittels Taylorentwicklung

Lemma 4.7 (Sub- und Superdifferenziale mittels Taylorentwicklung)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$. Angenommen, es existiert eine Taylorentwicklung von w um den Punkt (t_0, x_0) , d.h. es existiert $(q, p, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d \times d}$ mit

$$w(t, x) = w(t_0, x_0) + q(t - t_0) + p^\top (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top M(x - x_0) + o(|t - t_0| + |x - x_0|^2).$$

Dann gilt, im Fall $t_0 > 0$, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{2,-} w(t_0, x_0) &= \{(q, p, M - A) : A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d \times d}\}, \\ \mathcal{J}^{2,+} w(t_0, x_0) &= \{(q, p, M + A) : A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d \times d}\}, \end{aligned}$$

und falls $t_0 = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{2,-} w(t_0, x_0) &= \{(q - a, p, M - A) : a \in [0, \infty), A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d \times d}\}, \\ \mathcal{J}^{2,+} w(t_0, x_0) &= \{(q + a, p, M + A) : a \in [0, \infty), A \geq 0 \text{ in } \mathbb{S}^{d \times d}\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.8 (Testfunktionen vs. Sub- und Superdifferentialiale)

Es sei $w : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal beschränkt und $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$. Dann gilt

$$\mathcal{J}^{2,-} w_*(t_0, x_0) = \{(\partial_t \varphi(t_0, x_0), D_x \varphi(t_0, x_0), D_x^2 \varphi(t_0, x_0)) : \\ \varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}), \varphi \leq w_*, \varphi(t_0, x_0) = w_*(t_0, x_0)\},$$

$$\mathcal{J}^{2,+} w^*(t_0, x_0) = \{(\partial_t \varphi(t_0, x_0), D_x \varphi(t_0, x_0), D_x^2 \varphi(t_0, x_0)) : \\ \varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}), \varphi \geq w^*, \varphi(t_0, x_0) = w^*(t_0, x_0)\}.$$

Definition 4.9 (Viskositätslösung)

Sei $w : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal beschränkt.

- (i) w heißt **Sublösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $(q, p, M) \in \mathcal{J}^{2,+}w^*(t, x)$ gilt, dass

$$F(t, x, w^*(t, x), q, p, M) \leq 0.$$

- (ii) w heißt **Superlösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $(q, p, M) \in \mathcal{J}^{2,-}w_*(t, x)$ gilt, dass

$$F(t, x, w_*(t, x), q, p, M) \geq 0.$$

- (iii) w heißt **Viskositätslösung** der PDE (4.2), falls w sowohl eine Sub- als auch eine Superlösung der PDE (4.2) im Viskositätssinne ist.

Beispiel für Sub- und Superdifferenziale

