Dr. Christoph Belak
Arbeitsgruppe Stochastik

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Übungsblatt 3

Abgabe: Dienstag, 13. Dezember, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1

Für $a, b > 0$ und $\mathcal{U} \triangleq \mathbb{R}$ betrachten wir ein stochastisches Kontrollproblem der Form

$$\mathcal{V}(t,x) = \inf_{\nu \in \mathcal{A}(t,x)} \mathrm{E}\Big[\int_t^T a\nu(s)^2 \mathrm{d}s - bX_{t,x}^{\nu}(T)\Big], \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R},$$

wobei $X_{t,x}^{\nu} = \{X_{t,x}^{\nu}(s)\}_{s \in [t,T]}$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$X_{t,x}^{\nu}(t) = x, \qquad \mathrm{d}X_{t,x}^{\nu}(s) = \nu(s)\mathrm{d}s + \mathrm{d}W(s), \qquad s \in [t,T],$$

bezeichnet.

(i) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{A}(t,x)$ für $\mathcal{U} \triangleq \mathbb{R}$.

(ii) Schreiben Sie die HJB Gleichung für dieses Problem hin und bestimmen Sie $\hat{\nu}$.

(iii) Lösen Sie die HJB Gleichung mit einem Ansatz der Form $W(t,x) = cx + h(t)$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

(iv) Überprüfen Sie, ob Sie den Verifikationssatz anwenden dürfen.

Hinweis: Vorsicht, es handelt sich hier um ein Minimierungsproblem. In der HJB Gleichung muss deshalb das Supremum durch ein Infimum ersetzt werden.

Aufgabe 2

Für $M, N, D > 0$, $A, B, \sigma \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ betrachten wir ein stochastisches Kontrollproblem der Form

$$\mathcal{V}(t,x) = \inf_{\nu \in \mathcal{A}(t,x)} \mathrm{E}\Big[\int_t^T \big[MX_{t,x}^{\nu}(s)^2 + N\nu(s)^2\big]\mathrm{d}s + DX_{t,x}^{\nu}(T)^2\Big], \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R},$$

wobei $X_{t,x}^{\nu} = \{X_{t,x}^{\nu}(s)\}_{s \in [t,T]}$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$X_{t,x}^{\nu}(t) = x, \qquad \mathrm{d}X_{t,x}^{\nu}(s) = \big[AX_{t,x}^{\nu}(s) + B\nu(s)\big]\mathrm{d}s + \sigma\mathrm{d}W(s), \qquad s \in [t,T],$$

bezeichnet.

(i) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{A}(t,x)$.

(ii) Schreiben Sie die HJB Gleichung für dieses Problem hin und bestimmen Sie $\hat{\nu}$.

(iii) Lösen Sie die HJB Gleichung mit einem Ansatz der Form $W(t,x) = h_1(t)x^2 + h_2(t)$.

(iv) Überprüfen Sie, ob Sie den Verifikationssatz anwenden dürfen.

Hinweis: Sie müssen h_1 und h_2 nicht explizit bestimmen. Es genügt zu zeigen, dass h_1 und h_2 existieren, so dass W die HJB Gleichung löst.