Universität Trier

Optimales Stoppen

Tutorium Stochastische Prozesse
20. Dezember 2016

Optimales Stoppen

Sei $X = \{X(t)\}_{t=1,\dots,N}$ ein $\mathbb{R}$-wertiger, adaptierter Prozess mit $\mathrm{E}[|X(t)|] < \infty$ für alle $t \in \{1, \dots, N\}$. Weiter sei Θ die Menge aller Stoppzeiten $\tau : \Omega \to \{1, \dots, N\}$.

Das **Optimale Stoppproblem** ist gegeben als

$$\sup_{\tau \in \Theta} \mathrm{E}[X(\tau)].$$

Beispiele: Heiratsproblem, Babyproblem, Hauskauf, ...

Allgemeiner: Amerikanische Optionen, Aufladen einer Elektroautoflotte, sequentielles Sampling, sequentielle Entscheidungsfindung, ...

Einfache Sonderfälle

Frage: Wenn X ein Supermartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort:

Frage: Wenn X ein Submartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort:

Frage: Wenn X ein Martingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort:

Einfache Sonderfälle

Frage: Wenn X ein Supermartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort: Stoppe sofort: $\tau \equiv 1$.

Frage: Wenn X ein Submartingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort: Stoppe am Ende: $\tau \equiv N$.

Frage: Wenn X ein Martingal ist, was ist die optimale Stoppzeit?

Antwort: Jede Stoppzeit ist optimal.

Lösung mittels Snell-Umhüllender

Das allgemeine Stoppproblem löst man durch **Rückwärtsinduktion**.

Definiere einen Prozess $Z = \{Z(t)\}_{t=1,\dots,N}$ durch

$$\begin{aligned} Z(N) &\triangleq X(N), \\ Z(t) &\triangleq X(t) \vee \mathrm{E}[Z(t+1)|\mathfrak{F}(t)], \qquad\qquad t = N-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

Eine **optimale Stoppzeit** ist dann

$$\tau^* \triangleq \min\{t = 1, \dots, N : Z(t) = X(t)\}$$

Wir nennen Z die **Snell-Umhüllende** von X, das kleinste Supermartingal größer als X. Es gilt, dass $Z(\cdot \wedge \tau^*)$ ein Martingal ist.