Universität Trier

Übungen zu bedingten Erwartungswerten

Tutorium Stochastische Prozesse
13. Dezember 2016

Bedingter Erwartungswert

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $\mathrm{E}[|X|] < \infty$. Sei weiter $\mathfrak{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben $\mathfrak{F}$, falls

(i) Y ist $\mathfrak{F}$-messbar,

(ii) es gilt $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$, und

(iii) es gilt $\mathrm{E}[\mathbb{1}_F X] = \mathrm{E}[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

Bedingter Erwartungswert

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $\mathrm{E}[|X|] < \infty$. Sei weiter $\mathfrak{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben $\mathfrak{F}$, falls

(i) Y ist $\mathfrak{F}$-messbar,

(ii) es gilt $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$, und

(iii) es gilt $\mathrm{E}[\mathbb{1}_F X] = \mathrm{E}[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

Ist $X \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, dann lässt sich $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ als **orthogonale Projektion** auf den Unterraum $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ auffassen.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Unabhängigkeit: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ falls X unabhängig von $\mathfrak{F}$ ist.

L^1-Stetigkeit: $\mathrm{E}[X_n|\mathfrak{F}] \to \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \to X$ in L^1.

Weiter gelten auch die **Klassiker**: Monotone Konvergenz, Lemma von Fatou, Dominierte Konvergenz, Jensens Ungleichung, ...

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

(W1) W ist stetig.

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

(W1) W ist stetig.

(W2) $W(0) = 0$ fast sicher.

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

(W1) W ist stetig.

(W2) $W(0) = 0$ fast sicher.

(W3) $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \leq t$.

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

- **(W1)** W ist stetig.
- **(W2)** $W(0) = 0$ fast sicher.
- **(W3)** $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \leq t$.
- **(W4)** $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für alle $s \leq t$.

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

(W1) W ist stetig.

(W2) $W(0) = 0$ fast sicher.

(W3) $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \le t$.

(W4) $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für alle $s \le t$.

Ein $\mathbb{N}_0$-wertiger Prozess $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

- **(W1)** W ist stetig.
- **(W2)** $W(0) = 0$ fast sicher.
- **(W3)** $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \leq t$.
- **(W4)** $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für alle $s \leq t$.

Ein $\mathbb{N}_0$-wertiger Prozess $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

- **(P1)** N ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

- **(W1)** W ist stetig.
- **(W2)** $W(0) = 0$ fast sicher.
- **(W3)** $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \leq t$.
- **(W4)** $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für alle $s \leq t$.

Ein $\mathbb{N}_0$-wertiger Prozess $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

- **(P1)** N ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.
- **(P2)** $N(0) = 0$ fast sicher.

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

- **(W1)** W ist stetig.
- **(W2)** $W(0) = 0$ fast sicher.
- **(W3)** $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \leq t$.
- **(W4)** $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ für alle $s \leq t$.

Ein $\mathbb{N}_0$-wertiger Prozess $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

- **(P1)** N ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.
- **(P2)** $N(0) = 0$ fast sicher.
- **(P3)** $N(t) - N(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^N(s)$ für alle $s \leq t$.

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

- **(W1)** W ist stetig.
- **(W2)** $W(0) = 0$ fast sicher.
- **(W3)** $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \leq t$.
- **(W4)** $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für alle $s \leq t$.

Ein $\mathbb{N}_0$-wertiger Prozess $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

- **(P1)** N ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.
- **(P2)** $N(0) = 0$ fast sicher.
- **(P3)** $N(t) - N(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^N(s)$ für alle $s \leq t$.
- **(P4)** $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(\int_t^s \vartheta(u)\mathrm{d}u)$ für alle $s \leq t$,

Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein $\mathbb{R}$-wertiger Prozess $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

(W1) W ist stetig.

(W2) $W(0) = 0$ fast sicher.

(W3) $W(t) - W(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^W(s)$ für alle $s \le t$.

(W4) $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ für alle $s \le t$.

Ein $\mathbb{N}_0$-wertiger Prozess $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

(P1) N ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.

(P2) $N(0) = 0$ fast sicher.

(P3) $N(t) - N(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{F}^N(s)$ für alle $s \le t$.

(P4) $N(t) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(\int_t^s \vartheta(u)\mathrm{d}u)$ für alle $s \le t$,

wobei $\vartheta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine Borel messbare, positive Funktion ist mit

$$\int_0^T \vartheta(u)\mathrm{d}u < \infty \qquad \text{für alle } T > 0.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: W ist ein **Martingal**, d.h. $\mathrm{E}[|W(t)|] < \infty$ für alle $t \in [0, \infty)$ und

$$W(s) = \mathrm{E}\big[W(t) \big| \mathfrak{F}(s)\big] \qquad \text{für alle } s \leq t.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: W ist ein **Martingal**, d.h. $\mathrm{E}[|W(t)|] < \infty$ für alle $t \in [0, \infty)$ und

$$W(s) = \mathrm{E}\big[W(t)\big|\mathfrak{F}(s)\big] \qquad \text{für alle } s \leq t.$$

Aufgabe 2: Sei ϑ konstant. Dann existiert $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ wachsend, so dass

$$N(s) - f(s) = \mathrm{E}\big[N(t) - f(t)\big|\mathfrak{F}(s)\big] \qquad \text{für alle } s \leq t.$$

Aufgabe 3: Es gilt $W(s)^2 - s = \mathrm{E}[W(t)^2 - t|\mathfrak{F}(s)]$.

Aufgabe 4: Es gilt $\mathrm{E}[|W(t) - W(s)|^2|\mathfrak{F}(s)] = \mathrm{E}[W(t)^2 - W(s)^2|\mathfrak{F}(s)]$.

Aufgabe 5: Für alle $0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_n$ gilt

$$\mathrm{E}\big[W(t_n)^2\big] = \mathrm{E}\big[W(t_0)^2\big] + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\big[|W(t_k) - W(t_{k-1})|^2\big].$$

Aufgabe 6: Für alle $s \leq t \leq u \leq v$ gilt

$$\mathrm{E}\big[(W(v) - W(u))(W(t) - W(s))\big|\mathfrak{F}(s)\big] = 0.$$