

Übungen zu bedingten Erwartungswerten

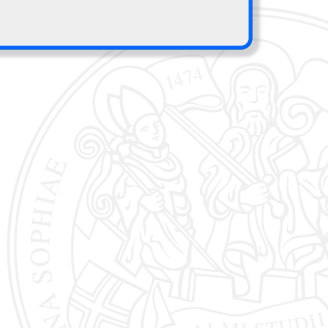
**Tutorium Stochastische Prozesse**  
13. Dezember 2016



## Definition

Sei  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , so dass  $E[|X|] < \infty$ . Sei weiter  $\mathfrak{F}$  eine Teil- $\sigma$ -Algebra von  $\mathfrak{A}$ . Eine Zufallsvariable  $Y$  heißt **bedingter Erwartungswert** von  $X$  gegeben  $\mathfrak{F}$ , falls

- (i)  $Y$  ist  $\mathfrak{F}$ -messbar,
- (ii) es gilt  $E[|Y|] < \infty$ , und
- (iii) es gilt  $E[\mathbf{1}_F X] = E[\mathbf{1}_F Y]$  für alle  $F \in \mathfrak{F}$ .



## Definition

Sei  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , so dass  $E[|X|] < \infty$ . Sei weiter  $\mathfrak{F}$  eine Teil- $\sigma$ -Algebra von  $\mathfrak{A}$ . Eine Zufallsvariable  $Y$  heißt **bedingter Erwartungswert** von  $X$  gegeben  $\mathfrak{F}$ , falls

- (i)  $Y$  ist  $\mathfrak{F}$ -messbar,
- (ii) es gilt  $E[|Y|] < \infty$ , und
- (iii) es gilt  $E[\mathbf{1}_F X] = E[\mathbf{1}_F Y]$  für alle  $F \in \mathfrak{F}$ .

Ist  $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , dann lässt sich  $E[X|\mathfrak{F}]$  als **orthogonale Projektion** auf den Unterraum  $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  auffassen.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

**Linearität:**  $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$ .

**Monotonie:**  $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$  falls  $X \leq Y$ .

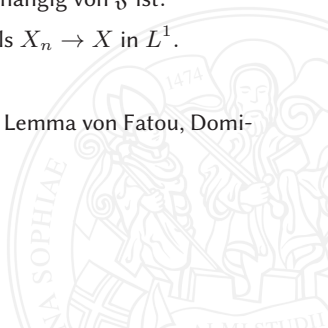
**Turmeigenschaft:**  $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$  falls  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ .

**Messbarkeit:**  $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$  falls  $X$   $\mathfrak{F}$ -messbar ist.

**Unabhängigkeit:**  $E[X|\mathfrak{F}] = E[X]$  falls  $X$  unabhängig von  $\mathfrak{F}$  ist.

**$L^1$ -Stetigkeit:**  $E[X_n|\mathfrak{F}] \rightarrow E[X|\mathfrak{F}]$  in  $L^1$  falls  $X_n \rightarrow X$  in  $L^1$ .

Weiter gelten auch die **Klassiker**: Monotone Konvergenz, Lemma von Fatou, Dominierte Konvergenz, Jensens Ungleichung, ...



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.

**(W3)**  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .





# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.

**(W3)**  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .

**(W4)**  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für alle  $s \leq t$ .



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.

**(W3)**  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .

**(W4)**  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für alle  $s \leq t$ .

Ein  $\mathbb{N}_0$ -wertiger Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

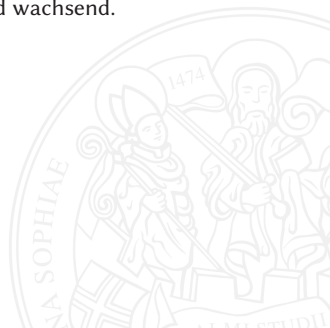
**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.

**(W3)**  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .

**(W4)**  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für alle  $s \leq t$ .

Ein  $\mathbb{N}_0$ -wertiger Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

**(P1)**  $N$  ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

(W1)  $W$  ist stetig.

(W2)  $W(0) = 0$  fast sicher.

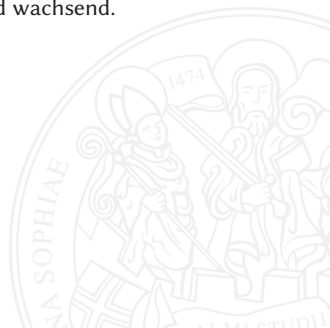
(W3)  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .

(W4)  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für alle  $s \leq t$ .

Ein  $\mathbb{N}_0$ -wertiger Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

(P1)  $N$  ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.

(P2)  $N(0) = 0$  fast sicher.



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.

**(W3)**  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .

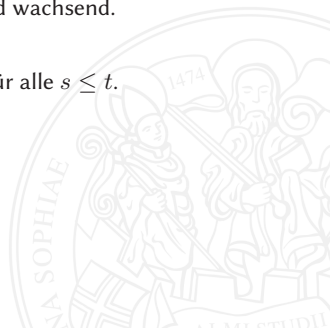
**(W4)**  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für alle  $s \leq t$ .

Ein  $\mathbb{N}_0$ -wertiger Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

**(P1)**  $N$  ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.

**(P2)**  $N(0) = 0$  fast sicher.

**(P3)**  $N(t) - N(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^N(s)$  für alle  $s \leq t$ .



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.

**(W3)**  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .

**(W4)**  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für alle  $s \leq t$ .

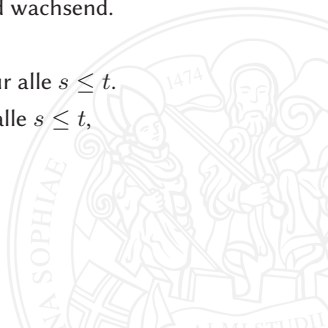
Ein  $\mathbb{N}_0$ -wertiger Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

**(P1)**  $N$  ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.

**(P2)**  $N(0) = 0$  fast sicher.

**(P3)**  $N(t) - N(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^N(s)$  für alle  $s \leq t$ .

**(P4)**  $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\int_t^s \vartheta(u) du)$  für alle  $s \leq t$ ,



# Brownsche Bewegung und Poisson Prozess

Ein  $\mathbb{R}$ -wertiger Prozess  $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Brownsche Bewegung** oder **Wiener Prozess**, falls gilt:

**(W1)**  $W$  ist stetig.

**(W2)**  $W(0) = 0$  fast sicher.

**(W3)**  $W(t) - W(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^W(s)$  für alle  $s \leq t$ .

**(W4)**  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für alle  $s \leq t$ .

Ein  $\mathbb{N}_0$ -wertiger Prozess  $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  heißt **Poisson Prozess**, falls gilt:

**(P1)**  $N$  ist ein Zählprozess, d.h. rechtsstetig und wachsend.

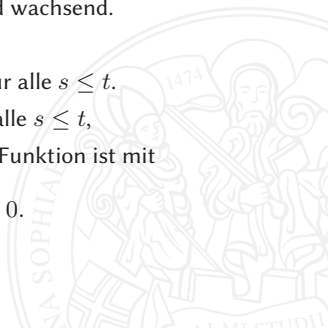
**(P2)**  $N(0) = 0$  fast sicher.

**(P3)**  $N(t) - N(s)$  ist unabhängig von  $\mathfrak{F}^N(s)$  für alle  $s \leq t$ .

**(P4)**  $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\int_s^t \vartheta(u) du)$  für alle  $s \leq t$ ,

wobei  $\vartheta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  eine Borel messbare, positive Funktion ist mit

$$\int_0^T \vartheta(u) du < \infty \quad \text{für alle } T > 0.$$



**Aufgabe 1:**  $W$  ist ein **Martingal**, d.h.  $E[|W(t)|] < \infty$  für alle  $t \in [0, \infty)$  und

$$W(s) = E[W(t) | \mathfrak{F}(s)] \quad \text{für alle } s \leq t.$$





# Übungsaufgaben

**Aufgabe 1:**  $W$  ist ein **Martingal**, d.h.  $E[|W(t)|] < \infty$  für alle  $t \in [0, \infty)$  und

$$W(s) = E[W(t) | \mathfrak{F}(s)] \quad \text{für alle } s \leq t.$$

**Aufgabe 2:** Sei  $\vartheta$  konstant. Dann existiert  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wachsend, so dass

$$N(s) - f(s) = E[N(t) - f(t) | \mathfrak{F}(s)] \quad \text{für alle } s \leq t.$$

**Aufgabe 3:** Es gilt  $W(s)^2 - s = E[W(t)^2 - t | \mathfrak{F}(s)]$ .

**Aufgabe 4:** Es gilt  $E[|W(t) - W(s)|^2 | \mathfrak{F}(s)] = E[W(t)^2 - W(s)^2 | \mathfrak{F}(s)]$ .

**Aufgabe 5:** Für alle  $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$  gilt

$$E[W(t_n)^2] = E[W(t_0)^2] + \sum_{k=1}^n E[|W(t_k) - W(t_{k-1})|^2].$$

**Aufgabe 6:** Für alle  $s \leq t \leq u \leq v$  gilt

$$E[(W(v) - W(u))(W(t) - W(s)) | \mathfrak{F}(s)] = 0.$$

