

Der Konsistenzsatz und bedingte Erwartungswerte

Tutorium Stochastische Prozesse
06. Dezember 2016



Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Wiederholung: Pfadraum, Produkt- σ -Algebra und Verteilungen
- (2) Der Konsistenzsatz von Kolmogorov
- (3) Bedingte Erwartungswerte



Pfadraum, Produkt- σ -Algebra, Verteilungen



Pfadraum und Produkt- σ -Algebra

Wiederholung: Was war noch gleich der Pfadraum und die Produkt- σ -Algebra?



Wiederholung: Was war noch gleich der Pfadraum und die Produkt- σ -Algebra?

Definition

Sei (S, \mathfrak{G}) ein messbarer Raum und \mathcal{T} eine Zeitindexmenge. Dann bezeichnen wir die Menge

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}$$

den **Pfadraum** auf S .

Wiederholung: Was war noch gleich der Pfadraum und die Produkt- σ -Algebra?

Definition

Sei (S, \mathfrak{G}) ein messbarer Raum und \mathcal{T} eine Zeitindexmenge. Dann bezeichnen wir die Menge

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}$$

den **Pfadraum** auf S . Die **Produkt- σ -Algebra** $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ ist gegen durch

$$\mathfrak{G}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\mathfrak{Z}),$$

wobei \mathfrak{Z} die **endlich-dimensionalen Zylindermengen** bezeichnet:

$$\mathfrak{Z} \triangleq \left\{ \prod_{t \in \mathcal{T}} B_t : B_t \in \mathfrak{G} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T} \right\}.$$

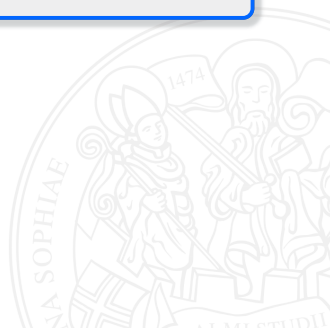
Die Produkt- σ -Algebra lässt sich alternativ auch durch die sogenannten Koordinatenabbildungen definieren.

Definition

Seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ endlich, d.h. $\mathcal{F} = \{t_1, \dots, t_n\}$. Dann bezeichnet

$$\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} : S^{\mathcal{T}} \rightarrow S^{\mathcal{F}}, \quad \pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}(f) \triangleq (f(t_1), \dots, f(t_n))$$

Die **Koordinatenabbildung** von \mathcal{T} auf \mathcal{F} .



Koordinatenabbildungen

Die Produkt- σ -Algebra lässt sich alternativ auch durch die sogenannten Koordinatenabbildungen definieren.

Definition

Seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ endlich, d.h. $\mathcal{F} = \{t_1, \dots, t_n\}$. Dann bezeichnet

$$\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} : S^{\mathcal{T}} \rightarrow S^{\mathcal{F}}, \quad \pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}(f) \triangleq (f(t_1), \dots, f(t_n))$$

Die **Koordinatenabbildung** von \mathcal{T} auf \mathcal{F} .

Lemma

Die Produkt- σ -Algebra ist die kleinste σ -Algebra, welche alle Koordinatenabbildungen messbar macht, d.h.

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} = \sigma(\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} : \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}).$$

Frage: Was sind noch gleich die endlich-dimensionalen Verteilungen?



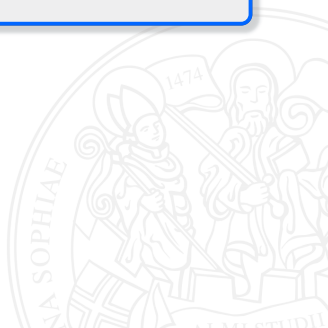
Frage: Was sind noch gleich die endlich-dimensionalen Verteilungen?

Definition

Sei X ein stochastischer Prozess. Dann bezeichnen wir die Familie

$$\left\{ \mathbb{P}[(X(t_1), \dots, X(t_n)) \in \cdot] \right\}_{t_1 \leq \dots \leq t_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}}$$

als die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X .



Frage: Was sind noch gleich die endlich-dimensionalen Verteilungen?

Definition

Sei X ein stochastischer Prozess. Dann bezeichnen wir die Familie

$$\left\{ \mathbb{P}[(X(t_1), \dots, X(t_n)) \in \cdot] \right\}_{t_1 \leq \dots \leq t_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}}$$

als die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X .

Alternativ lassen sich die endlich-dimensionalen Verteilungen auch durch die Koordinatenabbildungen ausdrücken:

$$\left\{ \mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} \right\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}} = \left\{ \mathbb{P}[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}(X) \in \cdot] \right\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$$

Der Konsistenzsatz von Kolmogorov



Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmen.



Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben sind?



Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:



Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:

- (i) Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.



Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:

- (i) Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.
- (ii) Einen Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$.



Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:

- (i) Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.
- (ii) Einen Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$.
- (iii) X und \mathbb{P} müssen zusammenpassen, damit sich die endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ ergeben.



Idee: Wähle (Ω, \mathfrak{A}) und X so einfach wie möglich und konstruiere dann \mathbb{P} .



Idee: Wähle (Ω, \mathfrak{A}) und X so einfach wie möglich und konstruiere dann \mathbb{P} .

Die einfachste Wahl ist

$$\Omega \triangleq \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} \triangleq \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathcal{T}}$$



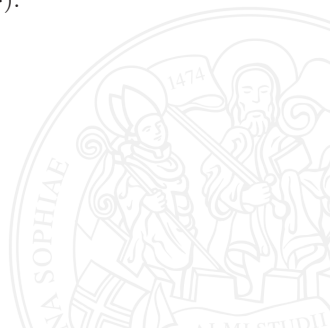
Idee: Wähle (Ω, \mathfrak{A}) und X so einfach wie möglich und konstruiere dann \mathbb{P} .

Die einfachste Wahl ist

$$\Omega \triangleq \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} \triangleq \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathcal{T}}$$

und X als die **Identität**, d.h.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad X(\cdot, \omega) = \omega(\cdot).$$



Idee: Wähle (Ω, \mathfrak{A}) und X so einfach wie möglich und konstruiere dann \mathbb{P} .

Die einfachste Wahl ist

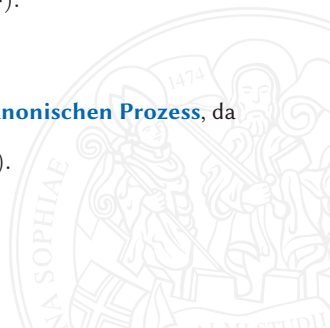
$$\Omega \triangleq \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} \triangleq \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathcal{T}}$$

und X als die **Identität**, d.h.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad X(\cdot, \omega) = \omega(\cdot).$$

Wir bezeichnen X als den **Koordinatenprozess** oder **kanonischen Prozess**, da

$$X(t, \omega) = \pi_{\{t\}}^{\mathcal{T}}(X(\cdot, \omega)) = \omega(t).$$



Um \mathbb{P} zu eindeutig zu bestimmen, genügt es, \mathbb{P} auf den endlich-dimensionalen Zylindermengen \mathfrak{Z} zu definieren. Sei dazu $B \in \mathfrak{Z}$, d.h.

$$B = \prod_{t \in \mathcal{T}} B_t$$

und $B_t \neq \mathbb{R}$ genau dann, wenn $t \in \mathcal{F} \triangleq \{t_1, \dots, t_n\}$. Dann gilt:

$$B = \{\pi_{\mathcal{F}}^T \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}\}.$$



Um \mathbb{P} zu eindeutig zu bestimmen, genügt es, \mathbb{P} auf den endlich-dimensionalen Zylindermengen \mathfrak{J} zu definieren. Sei dazu $B \in \mathfrak{J}$, d.h.

$$B = \prod_{t \in \mathcal{T}} B_t$$

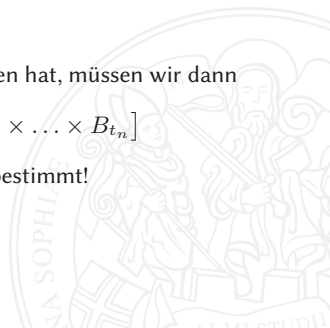
und $B_t \neq \mathbb{R}$ genau dann, wenn $t \in \mathcal{F} \triangleq \{t_1, \dots, t_n\}$. Dann gilt:

$$B = \{\pi_{\mathcal{F}}^T \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}\}.$$

Damit X die richtigen endlich-dimensionalen Verteilungen hat, müssen wir dann

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\pi_{\mathcal{F}}^T \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}] \triangleq \mathbb{P}_{\mathcal{F}}^T[B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}]$$

setzen. Auf diese Weise ist \mathbb{P} dann aber schon eindeutig bestimmt!



Frage: Was ist das Problem bei dieser Konstruktion?



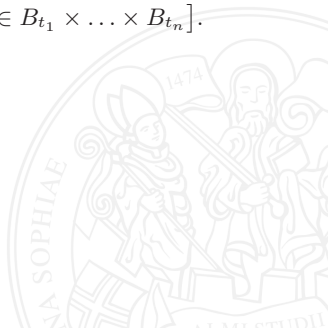
Frage: Was ist das Problem bei dieser Konstruktion?

Antwort: \mathbb{P} ist nicht notwendigerweise wohldefiniert. Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ eine weitere endliche Menge mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}[B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}]$$

nach Definition und

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\pi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}] = \mathbb{P}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}}[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}].$$



Frage: Was ist das Problem bei dieser Konstruktion?

Antwort: \mathbb{P} ist nicht notwendigerweise wohldefiniert. Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ eine weitere endliche Menge mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Dann gilt

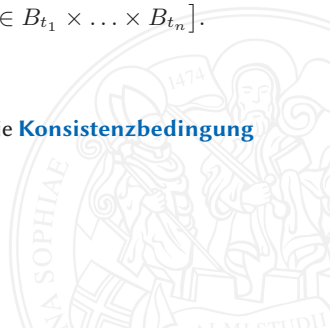
$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}[B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}]$$

nach Definition und

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\pi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}] = \mathbb{P}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}}[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \dots \times B_{t_n}].$$

Um also ein Maß \mathbb{P} definieren zu können, benötigen wir die **Konsistenzbedingung**

$$\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}[\cdot] = \mathbb{P}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}}[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in \cdot].$$



Bedingte Erwartungswerte



Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert?



Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert?

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $E[|X|] < \infty$. Sei weiter \mathfrak{F} eine Teil- σ -Algebra von \mathfrak{A} . Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben \mathfrak{F} , falls

- (i) Y ist \mathfrak{F} -messbar,
- (ii) es gilt $E[|Y|] < \infty$, und
- (iii) es gilt $E[\mathbb{1}_F X] = E[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

Man kann zeigen: Der bedingte Erwartungswert existiert und ist a.s. eindeutig.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}].$



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}].$

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y.$

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}.$

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.

Unabhängigkeit: $E[X|\mathfrak{F}] = E[X]$ falls X unabhängig von \mathfrak{F} ist.



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

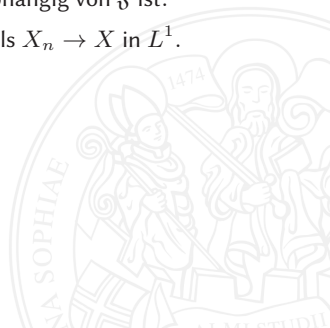
Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.

Unabhängigkeit: $E[X|\mathfrak{F}] = E[X]$ falls X unabhängig von \mathfrak{F} ist.

L^1 -Stetigkeit: $E[X_n|\mathfrak{F}] \rightarrow E[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \rightarrow X$ in L^1 .



Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $E[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha E[X|\mathfrak{F}] + E[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $E[X|\mathfrak{F}] \leq E[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

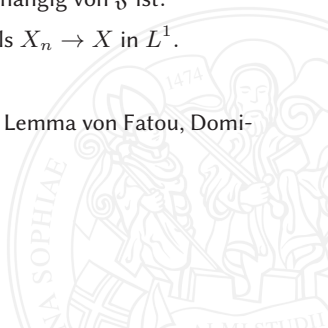
Turmeigenschaft: $E[E[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = E[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $E[XY|\mathfrak{F}] = XE[Y|\mathfrak{F}]$ falls X \mathfrak{F} -messbar ist.

Unabhängigkeit: $E[X|\mathfrak{F}] = E[X]$ falls X unabhängig von \mathfrak{F} ist.

L^1 -Stetigkeit: $E[X_n|\mathfrak{F}] \rightarrow E[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \rightarrow X$ in L^1 .

Weiter gelten auch die **Klassiker**: Monotone Konvergenz, Lemma von Fatou, Dominierte Konvergenz, Jensens Ungleichung, ...



Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen \mathfrak{F} auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq E[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.



Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen \mathfrak{F} auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq E[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Lemma

Sei $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt

$$E[X|\mathfrak{F}] = \arg \min_{Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})} \|X - Y\|_2.$$

Aufgabe: Sei $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$E[W(t) | \mathfrak{F}^W(s)] = W(s) \quad \text{für alle } s, t \in [0, \infty) \text{ mit } s \leq t.$$



Aufgabe: Sei $W = \{W(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$E[W(t) | \mathfrak{F}^W(s)] = W(s) \quad \text{für alle } s, t \in [0, \infty) \text{ mit } s \leq t.$$

Hinweis: Einen Prozess $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ mit der Eigenschaft

$$E[X(t) | \mathfrak{F}(s)] = X(s) \quad \text{für alle } s, t \in \mathcal{T} \text{ mit } s \leq t$$

nennen wir ein **Martingal** bezüglich der Filtrierung \mathfrak{F} .

