Universität Trier

Der Konsistenzsatz und bedingte Erwartungswerte

Tutorium Stochastische Prozesse
06. Dezember 2016

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Wiederholung: Pfadraum, Produkt-σ-Algebra und Verteilungen

(2) Der Konsistenzsatz von Kolmogorov

(3) Bedingte Erwartungswerte

Pfadraum, Produkt-σ-Algebra, Verteilungen

Pfadraum und Produkt-σ-Algebra

Wiederholung: Was war noch gleich der Pfadraum und die Produkt-σ-Algebra?

Pfadraum und Produkt-σ-Algebra

Wiederholung: Was war noch gleich der Pfadraum und die Produkt-σ-Algebra?

Definition

Sei $(S, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{T}$ eine Zeitindexmenge. Dann bezeichnen wir die Menge

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}$$

den **Pfadraum** auf S.

Pfadraum und Produkt-σ-Algebra

Wiederholung: Was war noch gleich der Pfadraum und die Produkt-σ-Algebra?

Definition

Sei $(S, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{T}$ eine Zeitindexmenge. Dann bezeichnen wir die Menge

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}$$

den **Pfadraum** auf S. Die **Produkt-σ-Algebra** $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ ist gegen durch

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\mathfrak{Z}),$$

wobei $\mathfrak{Z}$ die **endlich-dimensionalen Zylindermengen** bezeichnet:

$$\mathfrak{Z} \triangleq \Big\{\textstyle\prod_{t\in\mathcal{T}} B_t : B_t \in \mathfrak{S} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T}\Big\}.$$

Koordinatenabbildungen

Die Produkt-σ-Algebra lässt sich alternativ auch durch die sogenannten Koordinatenabbildungen definieren.

Definition

Seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ endlich, d.h. $\mathcal{F} = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Dann bezeichnet

$$\pi^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}} : S^{\mathcal{T}} \to S^{\mathcal{F}}, \qquad \pi^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}(f) \triangleq \big(f(t_1), \ldots, f(t_n)\big)$$

Die **Koordinatenabbildung** von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{F}$.

Koordinatenabbildungen

Die Produkt-σ-Algebra lässt sich alternativ auch durch die sogenannten Koordinatenabbildungen definieren.

Definition

Seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ endlich, d.h. $\mathcal{F} = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Dann bezeichnet

$$\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} : S^{\mathcal{T}} \to S^{\mathcal{F}}, \qquad \pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}(f) \triangleq \big(f(t_1), \ldots, f(t_n)\big)$$

Die **Koordinatenabbildung** von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{F}$.

Lemma

Die Produkt-σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra, welche alle Koordinatenabbildungen messbar macht, d.h.

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} = \sigma\big(\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} : \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}\big).$$

Endlich-Dimensionale Verteilungen

Frage: Was sind noch gleich die endlich-dimensionalen Verteilungen?

Endlich-Dimensionale Verteilungen

Frage: Was sind noch gleich die endlich-dimensionalen Verteilungen?

Definition

Sei X ein stochastischer Prozess. Dann bezeichnen wir die Familie

$$\Big\{\mathbb{P}\big[\big(X(t_1),\ldots,X(t_n)\big)\in\cdot\,\big]\Big\}_{t_1\leq\ldots\leq t_n\in\mathcal{T},n\in\mathbb{N}}$$

als die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X.

Endlich-Dimensionale Verteilungen

Frage: Was sind noch gleich die endlich-dimensionalen Verteilungen?

Definition

Sei X ein stochastischer Prozess. Dann bezeichnen wir die Familie

$$\left\{\mathbb{P}\big[\big(X(t_1), \ldots, X(t_n)\big) \in \cdot\,\big]\right\}_{t_1 \leq \ldots \leq t_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}}$$

als die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X.

Alternativ lassen sich die endlich-dimensionalen Verteilungen auch durch die Koordinatenabbildungen ausdrücken:

$$\left\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}} = \left\{\mathbb{P}\big[\pi^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}(X) \in \cdot\,\big]\right\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$$

Der Konsistenzsatz von Kolmogorov

Konstruktion von Prozessen

Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ bestimmen.

Konstruktion von Prozessen

Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ gegeben sind?

Konstruktion von Prozessen

Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:

Konstruktion von Prozessen

Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:

(i) Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Konstruktion von Prozessen

Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T}\text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:

(i) Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

(ii) Einen Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$.

Konstruktion von Prozessen

Bislang: Zu jedem Prozess X können wir die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmen.

Frage: Können wir dies umkehren? Gegeben $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T} \text{ endlich}}$, können wir einen Prozess X konstruieren, dessen endlich-dimensionale Verteilungen gerade durch $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben sind?

Sei $S = \mathbb{R}$ und $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T} \text{ endlich}}$ gegeben. Wir suchen:

- **(i)** Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.
- **(ii)** Einen Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$.
- **(iii)** X und $\mathbb{P}$ müssen zusammenpassen, damit sich die endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T} \text{ endlich}}$ ergeben.

Konstruktion von Prozessen

Idee: Wähle $(\Omega, \mathfrak{A})$ und X so einfach wie möglich und konstruiere dann $\mathbb{P}$.

Konstruktion von Prozessen

Idee: Wähle $(\Omega, \mathfrak{A})$ und X so einfach wie möglich und konstruiere dann $\mathbb{P}$.

Die einfachste Wahl ist

$$\Omega \triangleq \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A} \triangleq \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathcal{T}}$$

Konstruktion von Prozessen

Idee: Wähle $(\Omega, \mathfrak{A})$ und X so einfach wie möglich und konstruiere dann $\mathbb{P}$.

Die einfachste Wahl ist

$$\Omega \triangleq \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A} \triangleq \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathcal{T}}$$

und X als die **Identität**, d.h.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \qquad X(\cdot, \omega) = \omega(\cdot).$$

Konstruktion von Prozessen

Idee: Wähle $(\Omega, \mathfrak{A})$ und X so einfach wie möglich und konstruiere dann $\mathbb{P}$.

Die einfachste Wahl ist

$$\Omega \triangleq \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A} \triangleq \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{\mathcal{T}}$$

und X als die **Identität**, d.h.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \qquad X(\cdot, \omega) = \omega(\cdot).$$

Wir bezeichnen X als den **Koordinatenprozess** oder **kanonischen Prozess**, da

$$X(t, \omega) = \pi^{\mathcal{T}}_{\{t\}}(X(\cdot, \omega)) = \omega(t).$$

Konstruktion von Prozessen

Um $\mathbb{P}$ zu eindeutig zu bestimmen, genügt es, $\mathbb{P}$ auf den endlich-dimensionalen Zylindermengen $\mathfrak{Z}$ zu definieren. Sei dazu $B \in \mathfrak{Z}$, d.h.

$$B = \prod_{t \in \mathcal{T}} B_t$$

und $B_t \neq \mathbb{R}$ genau dann, wenn $t \in \mathcal{F} \triangleq \{t_1, \ldots, t_n\}$. Dann gilt:

$$B = \left\{\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\right\}.$$

Konstruktion von Prozessen

Um $\mathbb{P}$ zu eindeutig zu bestimmen, genügt es, $\mathbb{P}$ auf den endlich-dimensionalen Zylindermengen $\mathfrak{Z}$ zu definieren. Sei dazu $B \in \mathfrak{Z}$, d.h.

$$B = \prod_{t \in \mathcal{T}} B_t$$

und $B_t \neq \mathbb{R}$ genau dann, wenn $t \in \mathcal{F} \triangleq \{t_1, \ldots, t_n\}$. Dann gilt:

$$B = \{\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\}.$$

Damit X die richtigen endlich-dimensionalen Verteilungen hat, müssen wir dann

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}} \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}] \triangleq \mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\left[B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\right]$$

setzen. Auf diese Weise ist $\mathbb{P}$ dann aber schon eindeutig bestimmt!

Konstruktion von Prozessen

Frage: Was ist das Problem bei dieser Konstruktion?

Konstruktion von Prozessen

Frage: Was ist das Problem bei dieser Konstruktion?

Antwort: $\mathbb{P}$ ist nicht notwendigerweise wohldefiniert. Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ eine weitere endliche Menge mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\big[B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\big]$$

nach Definition und

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}\big[\pi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\big] = \mathbb{P}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}}\big[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\big].$$

Konstruktion von Prozessen

Frage: Was ist das Problem bei dieser Konstruktion?

Antwort: $\mathbb{P}$ ist nicht notwendigerweise wohldefiniert. Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ eine weitere endliche Menge mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}\left[B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\right]$$

nach Definition und

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}\left[\pi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\right] = \mathbb{P}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}}\left[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}\right].$$

Um also ein Maß $\mathbb{P}$ definieren zu können, benötigen wir die **Konsistenzbedingung**

$$\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{T}}[\cdot] = \mathbb{P}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{T}}\left[\pi_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \in \cdot\right].$$

Bedingte Erwartungswerte

Bedingter Erwartungswert

Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert?

Bedingter Erwartungswert

Frage: Wie definiert man den bedingten Erwartungswert?

Definition

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass $\mathrm{E}[|X|] < \infty$. Sei weiter $\mathfrak{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$. Eine Zufallsvariable Y heißt **bedingter Erwartungswert** von X gegeben $\mathfrak{F}$, falls

(i) Y ist $\mathfrak{F}$-messbar,

(ii) es gilt $\mathrm{E}[|Y|] < \infty$, und

(iii) es gilt $\mathrm{E}[\mathbb{1}_F X] = \mathrm{E}[\mathbb{1}_F Y]$ für alle $F \in \mathfrak{F}$.

Man kann zeigen: Der bedingte Erwartungswert existiert und ist a.s. eindeutig.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Unabhängigkeit: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ falls X unabhängig von $\mathfrak{F}$ ist.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Unabhängigkeit: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ falls X unabhängig von $\mathfrak{F}$ ist.

L^1-Stetigkeit: $\mathrm{E}[X_n|\mathfrak{F}] \to \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \to X$ in L^1.

Eigenschaften bedingter Erwartungswert

Es gelten die folgenden Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte:

Linearität: $\mathrm{E}[\alpha X + Y|\mathfrak{F}] = \alpha\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] + \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$.

Monotonie: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls $X \leq Y$.

Turmeigenschaft: $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathfrak{G}]|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ falls $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$.

Messbarkeit: $\mathrm{E}[XY|\mathfrak{F}] = X\mathrm{E}[Y|\mathfrak{F}]$ falls X $\mathfrak{F}$-messbar ist.

Unabhängigkeit: $\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathrm{E}[X]$ falls X unabhängig von $\mathfrak{F}$ ist.

L^1-Stetigkeit: $\mathrm{E}[X_n|\mathfrak{F}] \to \mathrm{E}[X|\mathfrak{F}]$ in L^1 falls $X_n \to X$ in L^1.

Weiter gelten auch die **Klassiker**: Monotone Konvergenz, Lemma von Fatou, Dominierte Konvergenz, Jensens Ungleichung, ...

Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen $\mathfrak{F}$ auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq \mathrm{E}[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Interpretation als Projektion

Wir können den bedingten Erwartungswert auch als **orthogonale Projektion** auf die Informationen $\mathfrak{F}$ auffassen.

Dazu betrachten wir $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ als **Hilbertraum** mit Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle \triangleq \mathrm{E}[XY].$$

Dann ist $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Unterraum von $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Lemma

Sei $X \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt

$$\mathrm{E}[X|\mathfrak{F}] = \arg \min_{Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})} \|X - Y\|_2.$$

Martingaleigenschaft der Brownschen Bewegung

Aufgabe: Sei $W = \{W(t)\}_{t \in [0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$\mathrm{E}[W(t)|\mathfrak{F}^W(s)] = W(s) \qquad \text{für alle } s, t \in [0,\infty) \text{ mit } s \leq t.$$

Martingaleigenschaft der Brownschen Bewegung

Aufgabe: Sei $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$\mathrm{E}[W(t)|\mathfrak{F}^W(s)] = W(s) \qquad \text{für alle } s,t \in [0,\infty) \text{ mit } s \leq t.$$

Hinweis: Einen Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{E}[X(t)|\mathfrak{F}(s)] = X(s) \qquad \text{für alle } s,t \in \mathcal{T} \text{ mit } s \leq t$$

nennen wir ein **Martingal** bezüglich der Filtrierung $\mathfrak{F}$.