Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Universität Trier
Wintersemester 2016/17

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, 12. Januar, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1
Sei X ein Submartingal bezüglich der Filtrierung $\mathfrak{F}$.

(a) Zeigen Sie, dass X ein Submartingal bezüglich der natürlichen Filtrierung $\mathfrak{F}^X$ ist.

(b) Sei $\mathfrak{G}$ eine Filtrierung mit $\mathfrak{G}(t) \subset \mathfrak{F}(t)$ für alle $t \in \mathcal{T}$. Unter welchen Bedingungen ist X ein Submartingal bezüglich $\mathfrak{G}$?

Aufgabe 2
Sei W eine Brownsche Bewegung und $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$. Definiere $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ durch

$$X(t) \triangleq e^{\lambda t + \sigma W(t)} \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

(a) Für fest gewähltes $t \in [0, T]$, bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $X(t)$.

(b) Unter welchen Bedingungen an λ, σ ist X ein (Sub-/Super-)Martingalbezüglich $\mathfrak{F}^W$?

Aufgabe 3
Beweisen Sie Proposition 32: Sei X ein Martingal mit $X(t) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{P})$ für alle $t \in \mathcal{T}$.

(i) Für alle $s, t \in \mathcal{T}$ mit $s \leq t$ gilt fast sicher

$$\mathbb{E}\big[|X(t) - X(s)|^2 \big| \mathfrak{F}(s)\big] = \mathbb{E}\big[X(t)^2 - X(s)^2 \big| \mathfrak{F}(s)\big]$$

(ii) Für $[t_0, \dots, t_n] \subset \mathcal{T}$ gilt

$$\mathbb{E}\big[X(t_n)^2\big] = \mathbb{E}\big[X(t_0)^2\big] + \textstyle\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big[|X(t_k) - X(t_{k-1})|^2\big].$$

Aufgabe 4
Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein adaptierter Prozess mit $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass X darstellbar ist als

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{N},$$

wobei M ein Martingal ist, A vorhersagbar, und $M(0) = A(0) = 0$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass diese Darstellung fast sicher eindeutig ist, und dass $A(t+1) \geq A(t)$ fast sicher für alle $t \in \mathbb{N}_0$ genau dann gilt, wenn X ein Submartingal ist.
Hinweis: Ein Prozess $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ heißt vorhersagbar, falls $A(t+1)$ messbar bezüglich $\mathfrak{F}(t)$ ist für alle $t \in \mathbb{N}_0$.