Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 8

Abgabe: Donnerstag, 22. Dezember, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1

Es sei W eine Brownsche Bewegung und $\kappa, \sigma > 0$. Zeigen Sie, dass der Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ mit

$$X(t) \triangleq e^{-\kappa t} W\big(\tfrac{\sigma^2}{2\kappa}(e^{2\kappa t} - 1)\big) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty)$$

ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess ist.

Aufgabe 2

Es sei W eine Brownsche Bewegung und $t > 0$ beliebig aber fest gewählt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t$ eine Partition von $[0,t]$, so dass $\max_{k=1,\ldots,n} |t_k^n - t_{k-1}^n| \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\textstyle\sum_{k=1}^n |W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)|^2 \to t \qquad \text{in } \mathrm{L}^2(\mathbb{P}).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Erwartungswert gegen t, und die Varianz gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3

Sei (S,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : \mathbb{D}^{(\infty)} \to S$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass sich f eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : [0,1] \to S$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 4

Sei $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung und $a > 0$. Wir definieren eine Stoppzeit $T_a : \Omega \to [0,\infty)$ durch

$$T_a(\omega) \triangleq \inf\{t > 0 : W(t,\omega) = a\}, \qquad \omega \in \Omega.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Prozess $\bar{W} = \{\bar{W}(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ gegeben durch

$$\bar{W}(t) \triangleq W(t)\mathbb{1}_{\{t<T_a\}} + (2a - W(t))\mathbb{1}_{\{t\geq T_a\}}, \qquad t \in [0,\infty),$$

eine Brownsche Bewegung ist.

(b) Definiere das laufende Maximum $M = \{M(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ von W durch

$$M(t) \triangleq \sup_{s\in[0,t]} W(s), \qquad t \in [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ und $y, t \geq 0$ gilt, dass

$$\mathbb{P}[M(t) \geq a, W(t) \leq a - y] = \mathbb{P}[W(t) \geq a + y].$$

Hinweis: Für Teil (a) dürfen Sie annehmen, dass der Prozess $\{W(t + T_a) - a\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung ist, und dass $\mathfrak{F}^{W(\cdot+T_a)-a}(t)$ für alle $t \geq 0$ unabhängig von $\mathfrak{F}^W(T_a)$ ist.