

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 7

Abgabe: Donnerstag, 15. Dezember, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1

Sei W eine Brownsche Bewegung und $T > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : \exists t_0, t_1 \in [0, T] \text{ mit } t_0 < t_1 \text{ und } W(s, \omega) \leq W(t, \omega) \forall t_0 \leq s \leq t \leq t_1\}] = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für fest gewählte $t_0, t_1 \in [0, T]$ mit $t_0 < t_1$ gilt, dass

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : W(s, \omega) \leq W(t, \omega) \text{ für alle } t_0 \leq s \leq t \leq t_1\}] = 0,$$

indem Sie Ereignisse der Form $\{W(s_0) \leq W(s_1) \leq \dots \leq W(s_n)\}$ für $t_0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n = t_1$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten.

Aufgabe 2

Sei W eine Brownsche Bewegung und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\inf\{t > 0 : W(t) \geq \alpha\sqrt{t}\} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ und $Y = \{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ rechtsstetige Prozesse. Zeigen Sie, dass X genau dann eine Modifikation von Y ist, falls X eine Version von Y ist. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass auf die Rechtsstetigkeitsannahme im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 4

Sei $Y = \{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ eine Modifikation eines \mathfrak{F} -adaptierten Prozesses $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, wobei \mathfrak{F} eine vollständige Filtrierung ist. Zeigen Sie, dass Y dann auch \mathfrak{F} -adaptiert ist.