Stochastische Prozesse

Übungsblatt 6

Abgabe: Donnerstag, 08. Dezember, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1

Sei $C(\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Bezeichne mit $\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$ die Produkt-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Weiter sei für gegebenes $t \in [0,\infty)$ die Koordinatenprojektion auf t gegeben durch $\pi_{\{t\}} : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$, $\pi_{\{t\}}(f) = f(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass folgendes Mengensystem eine σ-Algebra ist:

$$\bigcup_{Q \subset [0,\infty) \text{ abzählbar}} \sigma(\pi_{\{q\}} : q \in Q)$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)} = \bigcup_{Q \subset [0,\infty) \text{ abzählbar}} \sigma(\pi_{\{q\}} : q \in Q).$$

(c) Zeigen Sie, dass $C(\mathbb{R}) \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R})^{[0,\infty)}$, indem Sie für jede abzählbare Menge $Q \subset [0,\infty)$ zeigen, dass $C(\mathbb{R}) \notin \sigma(\pi_{\{q\}} : q \in Q)$.

Aufgabe 2

Sei $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung, $\alpha > 0$ und $t_0 \geq 0$. Geben Sie einen ausführlichen Beweis, dass die folgenden Prozesse ebenfalls Brownsche Bewegungen sind:

(i) $\{-W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$,

(ii) $\{W(\alpha t)/\sqrt{\alpha}\}_{t\in[0,\infty)}$,

(iii) $\{W(t_0 + t) - W(t_0)\}_{t\in[0,\infty)}$.

Aufgabe 3

Sei $W = \{W(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung und definiere eine sogenannte Brownsche Brücke $X = \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ durch

$$X(t) \triangleq W(t) - tW(1), \qquad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass $X(0) = X(1) = 0$ f.s. und dass X ein stetiger, zentrierter Gauss-Prozess mit Kovarianzfunktion $\Gamma(s,t) = s \wedge t - st$, $s,t \in [0,1]$ ist. Ist X auch $\mathfrak{F}^W$-adaptiert?

Aufgabe 4

(a) Es sei $q \in (0,1]$ und $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^q$. Für welche $p \in (0,1]$ ist diese Funktion p-Hölder stetig?

(b) Seien $p \in (0,1]$, $0 < a < 1$ und $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \triangleq \begin{cases} -1/\ln(x) & \text{falls } 0 < x \leq a \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zwar gleichmäßig stetig ist, aber nicht p-Hölder stetig ist.