Universität Trier

Optimale Abfischungsrate und das Merton Problem

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Das Fischereibeispiel

Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.

Das Fischereibeispiel

Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.
- $\mathcal{U} = [0, \nu_{\max}]$ für ein $\nu_{\max} > 0$.

Das Fischereibeispiel

Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.
- $\mathcal{U} = [0, \nu_{\max}]$ für ein $\nu_{\max} > 0$.
- **Fischpopulation** $X^\nu_{t,x} = \{X^\nu_{t,x}(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ gegeben durch

$$X^\nu_{t,x}(t) = x, \qquad \mathrm{d}X^\nu_{t,x}(s) = [b_0 - u]X^\nu_{t,x}(s)\mathrm{d}s + \sigma_0 X^\nu_{t,x}(s)\mathrm{d}W(s)$$

für jeden Abfischungsplan $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t) = \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t, x)$.

Das Fischereibeispiel

Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.
- $\mathcal{U} = [0, \nu_{\max}]$ für ein $\nu_{\max} > 0$.
- **Fischpopulation** $X^{\nu}_{t,x} = \{X^{\nu}_{t,x}(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ gegeben durch

  $$X^{\nu}_{t,x}(t) = x, \qquad \mathrm{d}X^{\nu}_{t,x}(s) = [b_0 - u]X^{\nu}_{t,x}(s)\mathrm{d}s + \sigma_0 X^{\nu}_{t,x}(s)\mathrm{d}W(s)$$

  für jeden Abfischungsplan $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t) = \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t, x)$.
- **Performance Funktional**: Wir nehmen an, dass $f(x, u) = kux$ und $g(x) = Kx$ für Konstanten $k, K > 0$. Dann ist das Performance Funktional

  $$\mathcal{J}(t, x, \nu) \triangleq \mathrm{E}\left[\int_t^T k\nu(s)X^{\nu}_{t,x}(s)\mathrm{d}s + KX^{\nu}_{t,x}(T)\right]$$

  Insbesondere gilt dann $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t, x) = \mathcal{A}(t, x)$.

Ein Ansatz für W

Um herauszufinden, ob $\hat{\nu}(t,x) = 0$ oder $\hat{\nu}(t,x) = \nu_{\max}$ ist es hilfreich, etwas Intuition für das Problem zu entwickeln:

- Je größer die Konstante K (Endgewinn) im Vergleich zu k (laufende Gewinnrate) ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t,x) = 0$, da eine große Fischpopulation zum Endzeitpunkt bevorzugt wird.

Ein Ansatz für W

Um herauszufinden, ob $\hat{\nu}(t,x) = 0$ oder $\hat{\nu}(t,x) = \nu_{\max}$ ist es hilfreich, etwas Intuition für das Problem zu entwickeln:

- Je größer die Konstante K (Endgewinn) im Vergleich zu k (laufende Gewinnrate) ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t,x) = 0$, da eine große Fischpopulation zum Endzeitpunkt bevorzugt wird.
- Je größer die Wachstumsrate b_0 der Fischpopulation ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t,x) = \nu_{\max}$, da eine hohe Abfischungsrate durch den großen Zuwachs der Fischpopulation ausgeglichen wird.

Ein Ansatz für W

Um herauszufinden, ob $\hat{\nu}(t,x) = 0$ oder $\hat{\nu}(t,x) = \nu_{\max}$ ist es hilfreich, etwas Intuition für das Problem zu entwickeln:

- Je größer die Konstante K (Endgewinn) im Vergleich zu k (laufende Gewinnrate) ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t,x) = 0$, da eine große Fischpopulation zum Endzeitpunkt bevorzugt wird.
- Je größer die Wachstumsrate b_0 der Fischpopulation ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t,x) = \nu_{\max}$, da eine hohe Abfischungsrate durch den großen Zuwachs der Fischpopulation ausgeglichen wird.
- Da sowohl die laufende Gewinnrate f als auch der Endgewinn g proportional zur Fischpopulation x sind, sollte die Entscheidung über $\hat{\nu}(t,x) = 0$ oder $\hat{\nu}(t,x) = \nu_{\max}$ nicht von x abhängen.

Lösung des Fischereibeispiels

Theorem 3.10 (Lösung des Fischereibeispiels)

Sei $\nu_{\max} > b_0$ und $k > K$. Dann ist die Wertfunktion $\mathcal{V}$ im Fischereibeispiel gegeben durch

$$\mathcal{V}(t,x) = Kxh(t) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

wobei $h : \overline{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ für t_0 wie in (3.24), h_1 wie in (3.25) und h_2 wie in (3.23) gegeben ist durch

$$h(t) = h_1(t)\mathbb{1}_{[0,t_0]}(t) + h_2(t)\mathbb{1}_{(t_0,T]}(t) \qquad \text{für alle } t \in \overline{\mathcal{T}}.$$

Darüber hinaus ist für jedes $(t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times (0,\infty)$ ein optimaler Kontrollprozess $\nu^*_{t,x} = \{\nu^*_{t,x}(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ gegeben durch

$$\nu^*_{t,x}(s) = \nu_{\max}\mathbb{1}_{(t_0,T]}(s), \qquad s \in \overline{\mathcal{T}}_t.$$

Vorgehen zum Lösen der HJB Gleichung

Im Allgemeinen löst man **HJB Gleichungen** wie folgt:

(1) Schreibe die HJB Gleichung im konkreten Beispiel auf.

(2) Bestimme $\hat{\nu}(t,x)$ für alle $(t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$. In der Regel geschieht dies durch Ableiten der HJB Gleichung nach u und anschließendes Null-setzen der Ableitung. Man beachte, dass $\hat{\nu}(t,x)$ dann formal auch von den Ableitungen von W abhängen kann.

(3) Setze $\hat{\nu}$ in die HJB Gleichung ein und löse die resultierende Gleichung.

(4) Überprüfe, ob die Lösung die Voraussetzungen von Theorem 3.9 erfüllt.

Lösung des Fischereibeispiels

Theorem 3.11 (Lösung des Merton Problems)

Für das Merton Problem gilt

$$\mathcal{V}(t,x) = \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} \left[\left[1 + \frac{1}{\Gamma}\right] e^{\Gamma(T-t)} - \frac{1}{\Gamma} \right]^{1-\gamma} \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

wobei $\Gamma \triangleq \frac{\gamma}{1-\gamma}[r + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\gamma}\lambda^{\top}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\lambda]$. Darüber hinaus ist für jedes $(t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ die optimale Strategie $(\pi^*_{t,x}, c^*_{t,x})$ gegeben durch

$$\pi^*_{t,x}(s) = \frac{1}{1-\gamma}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\lambda \quad \text{und} \quad c^*_{t,x}(s) = [\hat{h}(s)]^{-1} \quad \text{für alle } s \in \overline{\mathcal{T}}_t.$$