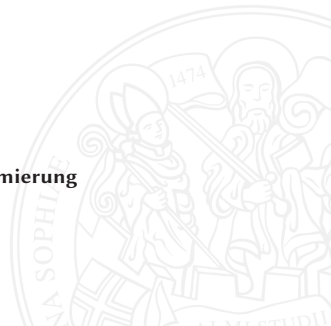


Optimale Abfischungsrate und das Merton Problem

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.



Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.
- $\mathcal{U} = [0, \nu_{\max}]$ für ein $\nu_{\max} > 0$.



Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.
- $\mathcal{U} = [0, \nu_{\max}]$ für ein $\nu_{\max} > 0$.
- **Fischpopulation** $X_{t,x}^\nu = \{X_{t,x}^\nu(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ gegeben durch

$$X_{t,x}^\nu(t) = x, \quad dX_{t,x}^\nu(s) = [b_0 - u]X_{t,x}^\nu(s)ds + \sigma_0 X_{t,x}^\nu(s)dW(s)$$

für jeden Abfischungsplan $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t) = \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t, x)$.



Wir wiederholen kurz das **Fischereibeispiel**:

- $\mathcal{O} = (0, \infty)$, also insbesondere $d = 1$.
- $\mathcal{U} = [0, \nu_{\max}]$ für ein $\nu_{\max} > 0$.
- **Fischpopulation** $X_{t,x}^\nu = \{X_{t,x}^\nu(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ gegeben durch

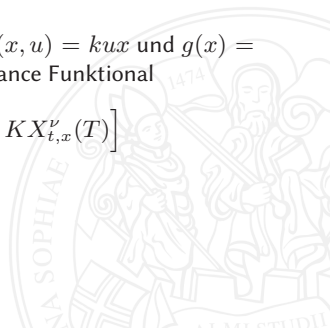
$$X_{t,x}^\nu(t) = x, \quad dX_{t,x}^\nu(s) = [b_0 - u]X_{t,x}^\nu(s)ds + \sigma_0 X_{t,x}^\nu(s)dW(s)$$

für jeden Abfischungsplan $\nu \in \mathcal{A}_U(t) = \mathcal{A}_O(t, x)$.

- **Performance Funktional**: Wir nehmen an, dass $f(x, u) = kux$ und $g(x) = Kx$ für Konstanten $k, K > 0$. Dann ist das Performance Funktional

$$\mathcal{J}(t, x, \nu) \triangleq \mathbb{E} \left[\int_t^T k\nu(s)X_{t,x}^\nu(s)ds + KX_{t,x}^\nu(T) \right]$$

Insbesondere gilt dann $\mathcal{A}_O(t, x) = \mathcal{A}(t, x)$.



Um herauszufinden, ob $\hat{\nu}(t, x) = 0$ oder $\hat{\nu}(t, x) = \nu_{\max}$ ist es hilfreich, etwas Intuition für das Problem zu entwickeln:

- Je größer die Konstante K (Endgewinn) im Vergleich zu k (laufende Gewinnrate) ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t, x) = 0$, da eine große Fischpopulation zum Endzeitpunkt bevorzugt wird.



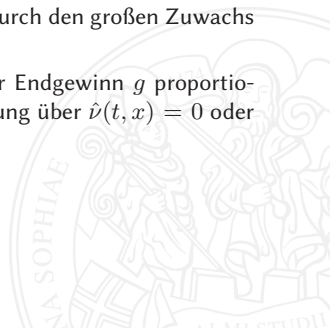
Um herauszufinden, ob $\hat{\nu}(t, x) = 0$ oder $\hat{\nu}(t, x) = \nu_{\max}$ ist es hilfreich, etwas Intuition für das Problem zu entwickeln:

- Je größer die Konstante K (Endgewinn) im Vergleich zu k (laufende Gewinnrate) ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t, x) = 0$, da eine große Fischpopulation zum Endzeitpunkt bevorzugt wird.
- Je größer die Wachstumsrate b_0 der Fischpopulation ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{\nu}(t, x) = \nu_{\max}$, da eine hohe Abfischungsrate durch den großen Zuwachs der Fischpopulation ausgeglichen wird.



Um herauszufinden, ob $\hat{v}(t, x) = 0$ oder $\hat{v}(t, x) = \nu_{\max}$ ist es hilfreich, etwas Intuition für das Problem zu entwickeln:

- Je größer die Konstante K (Endgewinn) im Vergleich zu k (laufende Gewinnrate) ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{v}(t, x) = 0$, da eine große Fischpopulation zum Endzeitpunkt bevorzugt wird.
- Je größer die Wachstumsrate b_0 der Fischpopulation ist, desto eher sind wir im Fall $\hat{v}(t, x) = \nu_{\max}$, da eine hohe Abfischungsrate durch den großen Zuwachs der Fischpopulation ausgeglichen wird.
- Da sowohl die laufende Gewinnrate f als auch der Endgewinn g proportional zur Fischpopulation x sind, sollte die Entscheidung über $\hat{v}(t, x) = 0$ oder $\hat{v}(t, x) = \nu_{\max}$ nicht von x abhängen.



Theorem 3.10 (Lösung des Fischereibeispiels)

Sei $\nu_{\max} > b_0$ und $k > K$. Dann ist die Wertfunktion \mathcal{V} im Fischereibeispiel gegeben durch

$$\mathcal{V}(t, x) = Kxh(t) \quad \text{für alle } (t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

wobei $h : \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ für t_0 wie in (3.24), h_1 wie in (3.25) und h_2 wie in (3.23) gegeben ist durch

$$h(t) = h_1(t)\mathbb{1}_{[0, t_0]}(t) + h_2(t)\mathbb{1}_{(t_0, T]}(t) \quad \text{für alle } t \in \bar{\mathcal{T}}.$$

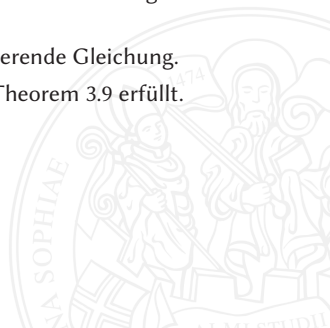
Darüber hinaus ist für jedes $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times (0, \infty)$ ein optimaler Kontrollprozess $\nu_{t,x}^* = \{\nu_{t,x}^*(s)\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_t}$ gegeben durch

$$\nu_{t,x}^*(s) = \nu_{\max}\mathbb{1}_{(t_0, T]}(s), \quad s \in \bar{\mathcal{T}}_t.$$

Vorgehen zum Lösen der HJB Gleichung

Im Allgemeinen löst man **HJB Gleichungen** wie folgt:

- (1) Schreibe die HJB Gleichung im konkreten Beispiel auf.
- (2) Bestimme $\hat{v}(t, x)$ für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$. In der Regel geschieht dies durch Ableiten der HJB Gleichung nach u und anschließendes Null-setzen der Ableitung. Man beachte, dass $\hat{v}(t, x)$ dann formal auch von den Ableitungen von W abhängen kann.
- (3) Setze \hat{v} in die HJB Gleichung ein und löse die resultierende Gleichung.
- (4) Überprüfe, ob die Lösung die Voraussetzungen von Theorem 3.9 erfüllt.



Theorem 3.11 (Lösung des Merton Problems)

Für das Merton Problem gilt

$$\mathcal{V}(t, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \left[\left[1 + \frac{1}{\Gamma} \right] e^{\Gamma(T-t)} - \frac{1}{\Gamma} \right]^{1-\gamma} \quad \text{für alle } (t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

wobei $\Gamma \triangleq \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[r + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\gamma} \lambda^\top (\sigma \sigma^\top)^{-1} \lambda \right]$. Darüber hinaus ist für jedes $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ die optimale Strategie $(\pi_{t,x}^*, c_{t,x}^*)$ gegeben durch

$$\pi_{t,x}^*(s) = \frac{1}{1-\gamma} (\sigma \sigma^\top)^{-1} \lambda \quad \text{und} \quad c_{t,x}^*(s) = [\hat{h}(s)]^{-1} \quad \text{für alle } s \in \bar{\mathcal{T}}_t.$$