Universität Trier

Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Zielsetzung dieses Abschnitts

Zielsetzung für diesen Abschnitt:

(1) Sie kennen die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung.

(2) Sie können die HJB Gleichung aus der Martingaloptimalität herleiten.

(3) Sie wissen, unter welchen Bedingungen eine Lösung der HJB Gleichung mit der Wertfunktion übereinstimmt.

(4) Sie wissen, wie aus der HJB Gleichung optimale Kontrollprozesse hergeleitet werden können.

(5) Sie verstehen, aus welchen Gründen wir welche Annahmen im Verifikationssatz treffen müssen.

(6) Sie verstehen den Zusammenhang zwischen dem Verifikationssatz und dem Darstellungssatz von Feynman-Kac.

Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Die **Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung** ist gegeben durch

$$\partial_t W(t,x) + \sup_{u \in \mathcal{U}} \big[\mathcal{L}_u W(t,x) + f(x,u)\big] = 0, \qquad (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O},$$

$$W(T,x) = g(x), \quad x \in \mathcal{O},$$

wobei der Differentialoperator $\mathcal{L}_u$ definiert ist als

$$\mathcal{L}_u W(t,x) \triangleq b(x,u)^\top \mathrm{D}_x W(t,x) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}\big[\sigma(x,u)\sigma(x,u)^\top \mathrm{D}_x^2 W(t,x)\big].$$

Verifikationssatz

Theorem 3.9 (Verifikationssatz)

Sei $W \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}) \cap C(\overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O})$ eine Lösung der HJB Gleichung

$$\partial_t W(t,x) + \sup_{u \in \mathcal{U}} \big[\mathcal{L}_u W(t,x) + f(x,u)\big] = 0, \qquad (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O},$$
$$W(T,x) = g(x), \quad x \in \mathcal{O}.$$

Sei weiter $(t_0, x_0) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ fest gewählt. Wir treffen folgende Annahmen:

(a) Es existieren Konstanten $K > 0$ und $p \geq 1$, so dass

$$0 \leq |W(t,x)| \leq K(1 + |x|^p), \qquad (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}. \tag{3.15}$$

(b) Es existiert eine messbar Abbildung $\hat{\nu} : \mathcal{T} \times \mathcal{O} \to \mathcal{U}$, so dass

$$\partial_t W(t,x) + \mathcal{L}_{\hat{\nu}(t,x)} W(t,x) + f(x, \hat{\nu}(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}.$$

Verifikationssatz

Theorem 3.9 (Verifikationssatz)

(c) Die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X^*(s) = b\big(X^*(s), \hat{\nu}(s, X^*(s))\big)\mathrm{d}s + \sigma\big(X^*(s), \hat{\nu}(s, X^*(s))\big)\mathrm{d}W(s)$$

besitzt eine eindeutige Lösung $X^* = \{X^*(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_{t_0}}$ mit Startwert $X^*(t_0) = x_0$.

(d) Für ein fest gewähltes $u_0 \in \mathcal{U}$ ist der Prozess $\nu^* = \{\nu^*(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_{t_0}}$ mit

$$\nu^*(s) \triangleq \hat{\nu}\big(s, X^*(s)\big)\mathbb{1}_{\mathcal{T}_{t_0}}(s) + u_0 \mathbb{1}_{\{T\}}(s), \qquad s \in \overline{\mathcal{T}}_{t_0},$$

eine zulässige Kontrollstrategie, d.h. $\nu^* \in \mathcal{A}(t_0, x_0)$.

Dann gilt $W(t_0, x_0) = \mathcal{V}(t_0, x_0)$ und ν^* ist optimal.

Bemerkungen zum Verifikationssatz

(i) Wenn wir Theorem 3.9 anwenden möchten, gibt es in der Praxis typischerweise zwei Schwierigkeiten. Zum einen besitzt die HJB Gleichung im Allgemeinen keine Lösung $W \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}) \cap C(\overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O})$ die zusätzlich noch Annahme (a) erfüllt. Wir müssen also bei jedem konkreten Beispiel überprüfen, ob eine solche Lösung existiert. Die zweite Schwierigkeit ist die Überprüfung der Zulässigkeit der Strategie ν^*, insbesondere falls $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}^d$. Auch hier muss die Zulässigkeit in jedem konkreten Beispiel einzeln überprüft werden.

Bemerkungen zum Verifikationssatz

(ii) Die Konstruktion von ν^* über die Funktion $\hat{\nu}$ mag seltsam anmuten, ist aber nötig, da ν^* einerseits von X^* abhängt, andererseits aber der Prozess ν^* benötigt wird, um den Prozess X^* überhaupt erst zu konstruieren. Da letztlich aber ein funktionaler Zusammenhang zwischen ν^* und X^* besteht und wir die Funktion (nämlich $\hat{\nu}$) schon vor der Konstruktion von ν^* und X^* kennen, stellt dies kein Problem dar.

Bemerkungen zum Verifikationssatz

(iii) Da der Endgewinn g im Allgemeinen nicht stetig differenzierbar sein muss, ist die Funktion $\hat{\nu}$ nur für Zeitpunkte in $\mathcal{T} = [0, T)$ wohldefiniert. Aus diesem Grund müssen wir in (d) den Prozess ν^* zum Zeitpunkt T auf einen beliebigen Wert setzen. Es ist dabei egal, welcher Wert gewählt wird. Da ν^* den Prozess X^* sowieso nur lokal (d.h. im Integral) beeinflusst, hat diese Wahl keinen Einfluss auf das System.

Bemerkungen zum Verifikationssatz

(iv) Besteht die Kontrollmenge nur aus einem einzigen Punkt, d.h. $\mathcal{U} = \{u\}$, dann vereinfacht sich die HJB Gleichung zu

$$\begin{aligned} \partial_t W(t,x) + \mathcal{L}_u W(t,x) + f(x,u) &= 0, && (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}, \\ W(T,x) &= g(x), && x \in \mathcal{O}, \end{aligned}$$

und die Annahmen (b) bis (d) sind automatisch erfüllt. Da es in diesem Fall nur einen einzigen Kontrollprozess, nämlich $\nu \equiv u$ gibt, folgt

$$W(t_0,x_0) = \mathcal{V}(t_0,x_0) = \mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^{T} f\big(X^u_{t_0,x_0}(r), u\big)\mathrm{d}r + g\big(X^u_{t_0,x_0}(T)\big)\Big].$$

Wir können den Verifikationssatz also als eine Verallgemeinerung von Theorem 2.5 (Feynman-Kac Darstellung) auffassen.

Bemerkungen zum Verifikationssatz

(v) Der Verifikationssatz impliziert das Bellman Prinzip, wenn die Aussage für alle $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ gilt. Um dies zu sehen, ersetzt man im Beweis einfach T durch $T \wedge \tau = \tau$, wobei τ eine $\overline{\mathcal{T}}_{t_0}$-wertige Stoppzeit ist. Dann folgt wie in Schritt 1

$$W(t_0, x_0) \geq \mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^{\tau} f\big(X^{\nu}_{t_0,x_0}(r), \nu(r)\big)\mathrm{d}r + W\big(\tau, X^{\nu}_{t_0,x_0}(\tau)\big)\Big]$$

für alle $\nu \in \mathcal{A}(t_0, x_0)$ und wie in Schritt 2

$$W(t_0, x_0) = \mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^{\tau} f\big(X^{\nu^*}_{t_0,x_0}(r), \nu^*(r)\big)\mathrm{d}r + W\big(\tau, X^{\nu^*}_{t_0,x_0}(\tau)\big)\Big].$$

In Kombination folgt mit $W = \mathcal{V}$ also das Bellman Prinzip:

$$\mathcal{V}(t_0, x_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}(t_0,x_0)} \mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^{\tau} f\big(X^{\nu}_{t_0,x_0}(r), \nu(r)\big)\mathrm{d}r + \mathcal{V}\big(\tau, X^{\nu}_{t_0,x_0}(\tau)\big)\Big].$$

Bemerkungen zum Verifikationssatz

(vi) Ist $\hat{W} : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, die dieselben Voraussetzungen wie W erfüllt, so folgt mit dem Verifikationssatz

$$\hat{W}(t_0, x_0) = \mathcal{V}(t_0, x_0) = W(t_0, x_0).$$

Wir können den Verifikationssatz also als einen Eindeutigkeitsbeweis für Lösungen der HJB Gleichung auffassen.