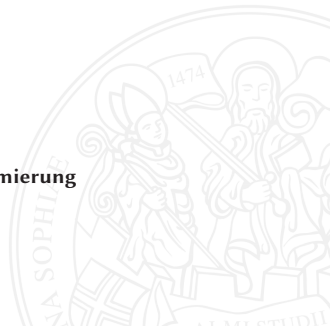


Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

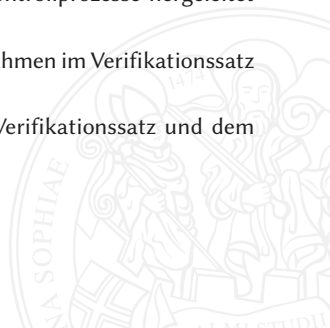
Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Zielsetzung dieses Abschnitts

Zielsetzung für diesen Abschnitt:

- (1) Sie kennen die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung.
- (2) Sie können die HJB Gleichung aus der Martingaloptimalität herleiten.
- (3) Sie wissen, unter welchen Bedingungen eine Lösung der HJB Gleichung mit der Wertfunktion übereinstimmt.
- (4) Sie wissen, wie aus der HJB Gleichung optimale Kontrollprozesse hergeleitet werden können.
- (5) Sie verstehen, aus welchen Gründen wir welche Annahmen im Verifikationssatz treffen müssen.
- (6) Sie verstehen den Zusammenhang zwischen dem Verifikationssatz und dem Darstellungssatz von Feynman-Kac.



Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Die **Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung** ist gegeben durch

$$\partial_t W(t, x) + \sup_{u \in \mathcal{U}} [\mathcal{L}_u W(t, x) + f(x, u)] = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O},$$

$$W(T, x) = g(x), \quad x \in \mathcal{O},$$

wobei der Differentialoperator \mathcal{L}_u definiert ist als

$$\mathcal{L}_u W(t, x) \triangleq b(x, u)^\top D_x W(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma(x, u) \sigma(x, u)^\top D_x^2 W(t, x)].$$

Theorem 3.9 (Verifikationssatz)

Sei $W \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}) \cap C(\bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O})$ eine Lösung der HJB Gleichung

$$\partial_t W(t, x) + \sup_{u \in \mathcal{U}} [\mathcal{L}_u W(t, x) + f(x, u)] = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O},$$

$$W(T, x) = g(x), \quad x \in \mathcal{O}.$$

Sei weiter $(t_0, x_0) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ fest gewählt. Wir treffen folgende Annahmen:

(a) Es existieren Konstanten $K > 0$ und $p \geq 1$, so dass

$$0 \leq |W(t, x)| \leq K(1 + |x|^p), \quad (t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}. \quad (3.15)$$

(b) Es existiert eine messbar Abbildung $\hat{v} : \mathcal{T} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$, so dass

$$\partial_t W(t, x) + \mathcal{L}_{\hat{v}(t, x)} W(t, x) + f(x, \hat{v}(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}.$$

Theorem 3.9 (Verifikationssatz)

(c) Die stochastische Differentialgleichung

$$dX^*(s) = b(X^*(s), \hat{\nu}(s, X^*(s)))ds + \sigma(X^*(s), \hat{\nu}(s, X^*(s)))dW(s)$$

besitzt eine eindeutige Lösung $X^* = \{X^*(s)\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_{t_0}}$ mit Startwert $X^*(t_0) = x_0$.

(d) Für ein fest gewähltes $u_0 \in \mathcal{U}$ ist der Prozess $\nu^* = \{\nu^*(s)\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_{t_0}}$ mit

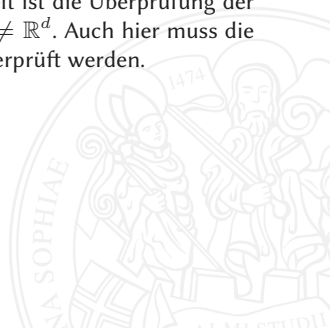
$$\nu^*(s) \triangleq \hat{\nu}(s, X^*(s)) \mathbb{1}_{\mathcal{T}_{t_0}}(s) + u_0 \mathbb{1}_{\{T\}}(s), \quad s \in \bar{\mathcal{T}}_{t_0},$$

eine zulässige Kontrollstrategie, d.h. $\nu^* \in \mathcal{A}(t_0, x_0)$.

Dann gilt $W(t_0, x_0) = \mathcal{V}(t_0, x_0)$ und ν^* ist optimal.

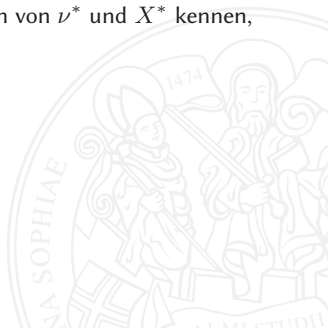
Bemerkungen zum Verifikationssatz

- (i) Wenn wir Theorem 3.9 anwenden möchten, gibt es in der Praxis typischerweise zwei Schwierigkeiten. Zum einen besitzt die HJB Gleichung im Allgemeinen keine Lösung $W \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O}) \cap C(\bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O})$ die zusätzlich noch Annahme (a) erfüllt. Wir müssen also bei jedem konkreten Beispiel überprüfen, ob eine solche Lösung existiert. Die zweite Schwierigkeit ist die Überprüfung der Zulässigkeit der Strategie ν^* , insbesondere falls $\mathcal{O} \neq \mathbb{R}^d$. Auch hier muss die Zulässigkeit in jedem konkreten Beispiel einzeln überprüft werden.



Bemerkungen zum Verifikationssatz

- (ii) Die Konstruktion von ν^* über die Funktion $\hat{\nu}$ mag seltsam anmuten, ist aber nötig, da ν^* einerseits von X^* abhängt, andererseits aber der Prozess ν^* benötigt wird, um den Prozess X^* überhaupt erst zu konstruieren. Da letztlich aber ein funktionaler Zusammenhang zwischen ν^* und X^* besteht und wir die Funktion (nämlich $\hat{\nu}$) schon vor der Konstruktion von ν^* und X^* kennen, stellt dies kein Problem dar.



Bemerkungen zum Verifikationssatz

- (iii) Da der Endgewinn g im Allgemeinen nicht stetig differenzierbar sein muss, ist die Funktion \hat{v} nur für Zeitpunkte in $\mathcal{T} = [0, T)$ wohldefiniert. Aus diesem Grund müssen wir in (d) den Prozess ν^* zum Zeitpunkt T auf einen beliebigen Wert setzen. Es ist dabei egal, welcher Wert gewählt wird. Da ν^* den Prozess X^* sowieso nur lokal (d.h. im Integral) beeinflusst, hat diese Wahl keinen Einfluss auf das System.



Bemerkungen zum Verifikationssatz

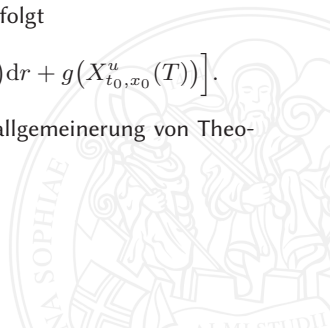
- (iv) Besteht die Kontrollmenge nur aus einem einzigen Punkt, d.h. $\mathcal{U} = \{u\}$, dann vereinfacht sich die HJB Gleichung zu

$$\begin{aligned}\partial_t W(t, x) + \mathcal{L}_u W(t, x) + f(x, u) &= 0, & (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}, \\ W(T, x) &= g(x), & x \in \mathcal{O},\end{aligned}$$

und die Annahmen (b) bis (d) sind automatisch erfüllt. Da es in diesem Fall nur einen einzigen Kontrollprozess, nämlich $\nu \equiv u$ gibt, folgt

$$W(t_0, x_0) = \mathcal{V}(t_0, x_0) = \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^T f(X_{t_0, x_0}^u(r), u) dr + g(X_{t_0, x_0}^u(T)) \right].$$

Wir können den Verifikationssatz also als eine Verallgemeinerung von Theorem 2.5 (Feynman-Kac Darstellung) auffassen.



Bemerkungen zum Verifikationssatz

- (v) Der Verifikationssatz impliziert das Bellman Prinzip, wenn die Aussage für alle $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ gilt. Um dies zu sehen, ersetzt man im Beweis einfach T durch $T \wedge \tau = \tau$, wobei τ eine $\overline{\mathcal{T}}_{t_0}$ -wertige Stoppzeit ist. Dann folgt wie in Schritt 1

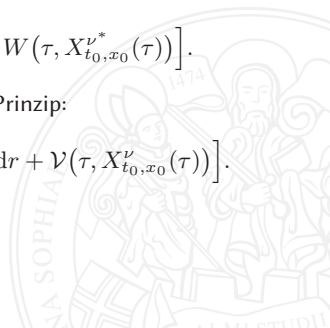
$$W(t_0, x_0) \geq \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} f(X_{t_0, x_0}^{\nu}(r), \nu(r)) dr + W(\tau, X_{t_0, x_0}^{\nu}(\tau)) \right]$$

für alle $\nu \in \mathcal{A}(t_0, x_0)$ und wie in Schritt 2

$$W(t_0, x_0) = \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} f(X_{t_0, x_0}^{\nu^*}(r), \nu^*(r)) dr + W(\tau, X_{t_0, x_0}^{\nu^*}(\tau)) \right].$$

In Kombination folgt mit $W = \mathcal{V}$ also das Bellman Prinzip:

$$\mathcal{V}(t_0, x_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}(t_0, x_0)} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{\tau} f(X_{t_0, x_0}^{\nu}(r), \nu(r)) dr + \mathcal{V}(\tau, X_{t_0, x_0}^{\nu}(\tau)) \right].$$



Bemerkungen zum Verifikationssatz

(vi) Ist $\hat{W} : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, die dieselben Voraussetzungen wie W erfüllt, so folgt mit dem Verifikationssatz

$$\hat{W}(t_0, x_0) = \mathcal{V}(t_0, x_0) = W(t_0, x_0).$$

Wir können den Verifikationssatz also als einen Eindeutigkeitsbeweis für Lösungen der HJB Gleichung auffassen.

