Universität Trier

Klassische Steuerung — Problemformulierung

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Zielsetzung dieses Abschnitts

Zielsetzung für diesen Abschnitt:

(1) Sie kennen die folgenden Begriffe: Zustandsraum, Kontrollmenge, Kontrollprozess, Zustandsprozess, kontrollierte SDEs, Explosion, Performance-Funktional, Zulässigkeit, Wertfunktion.

(2) Sie wissen, unter welchen Bedingungen kontrollierte SDEs eindeutige Lösungen besitzen.

(3) Sie wissen, wie das allgemeine Steuerungsproblem formuliert wird.

(4) Sie wissen, aus welchen Gründen das Steuerungsproblem potentiell nicht wohldefiniert sein könnte.

(5) Sie wissen, welche Annahmen getroffen werden müssen, damit das Steuerungsproblem wohldefiniert ist.

(6) Sie können die Wohldefiniertheit in konkreten Beispielen überprüfen.

Wiederholung: Das Fischereibeispiel

Das Fischereibeispiel:

- $\nu = \{\nu(t)\}_{t\in[0,T]}$ Abfischungsrate.
- $X^\nu = \{X^\nu(t)\}_{t\in[0,T]}$ Fischpopulation, gegeben als Lösung der SDE

$$\mathrm{d}X^\nu(t) = [b_0 - \nu(t)]X^\nu(t)\mathrm{d}t + \sigma_0 X^\nu(t)\mathrm{d}W(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.1}$$

  mit $X^\nu(t) = x$, wobei $b_0, \sigma_0 > 0$.
- Optimierungsproblem: Für Borel-messbare $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, maximiere

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^T f\big(\nu(t)X^\nu(t)\big)\mathrm{d}t + g\big(X^\nu(T)\big)\Big] \tag{3.2}$$

  über die Wahl von ν.

Wiederholung: Das Fischereibeispiel

Das Fischereibeispiel:

- $\nu = \{\nu(t)\}_{t\in[0,T]}$ Abfischungsrate.
- $X^\nu = \{X^\nu(t)\}_{t\in[0,T]}$ Fischpopulation, gegeben als Lösung der SDE

$$\mathrm{d}X^\nu(t) = [b_0 - \nu(t)]X^\nu(t)\mathrm{d}t + \sigma_0 X^\nu(t)\mathrm{d}W(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.1}$$

  mit $X^\nu(t) = x$, wobei $b_0, \sigma_0 > 0$.

- Optimierungsproblem: Für Borel-messbare $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, maximiere

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^T f\big(\nu(t)X^\nu(t)\big)\mathrm{d}t + g\big(X^\nu(T)\big)\Big] \tag{3.2}$$

  über die Wahl von ν.

Frage: Ist hier alles wohldefiniert?

(1) Existiert eine Lösung der SDE (3.1)?

(2) ist der Erwartungswert in (3.2) wohldefiniert?

Kontrollprozesse

Definition 3.1 (Kontrollprozess)

Sei $t \in \overline{\mathcal{T}}$. Dann bezeichnen wir jeden $\mathcal{U}$-wertigen und $\mathfrak{F}_t$-vorhersagbaren stochastischen Prozess $\nu = \{\nu(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ als **Kontrollprozess** auf $\overline{\mathcal{T}}_t$. Die Menge aller $\mathcal{U}$-wertigen Kontrollprozesse auf $\overline{\mathcal{T}}_t$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t)$.

Zustandsprozesse

Definition 3.2 (Zustandsprozess)

Seien $(t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t)$ ein Kontrollprozess auf $\overline{\mathcal{T}}_t$. Existiert eine eindeutige Lösung $X^{\nu}_{t,x} = \{X^{\nu}_{t,x}(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ der kontrollierten stochastischen Differentialgleichung (3.3) mit $X^{\nu}_{t,x}(t) = x$ und

$$\mathbb{P}\left[X^{\nu}_{t,x}(s) \in \mathcal{O} \text{ für alle } s \in \overline{\mathcal{T}}_t\right] = 1, \tag{3.4}$$

dann nennen wir $X^{\nu}_{t,x}$ den **Zustandsprozess** bezüglich (t, x, ν).

Minimale Zulässigkeit

Definition 3.3 (Minimale Zulässigkeit)

Sei $t \in \overline{\mathcal{T}}$ gegeben. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}(t)$ die Menge aller Kontrollprozesse $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t)$ mit

$$\mathrm{E}\left[\int_t^T \left|b(0,\nu(s))\right|^2 + \left|\sigma(0,\nu(s))\right|^2 \mathrm{d}s\right] < \infty.$$

Einen solchen Kontrollprozess ν nennen wir **minimal zulässig**.

Existenz und Eindeutigkeit kontrollierter SDEs

Lemma 3.4 (Existenz und Eindeutigkeit kontrollierter SDEs)

Sei $t \in \overline{\mathcal{T}}$ und sei $\nu \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}(t)$ minimal zulässig. Sei weiter ξ eine $\mathbb{R}^d$-wertige und $\mathfrak{F}(t)$-messbare Zufallsvariable mit $\mathrm{E}[|\xi|^p] < \infty$ für ein $p \geq 1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und eine eindeutige, stetige Lösung $X^{\nu}_{t,\xi} = \{X^{\nu}_{t,\xi}(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ der kontrollierten SDE (3.3) mit $X^{\nu}_{t,\xi}(t) = \xi$ und

$$\mathrm{E}\Big[\sup\nolimits_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t} \big|X^{\nu}_{t,\xi}(s)\big|^p\Big] \leq C\big(1 + \mathrm{E}[|\xi|^p]\big)e^{CT}. \tag{3.5}$$

Definition 3.5 ($\mathcal{O}$-Kompatibilität)

Seien $(t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}(t)$. Falls der Prozess $X^\nu_{t,x} = \{X^\nu_{t,x}(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ ein Zustandsprozess ist, d.h. falls

$$\mathbb{P}\left[X^\nu_{t,x}(s) \in \mathcal{O} \text{ für alle } s \in \overline{\mathcal{T}}_t\right] = 1,$$

dann bezeichnen wir ν als **$\mathcal{O}$-kompatibel** bezüglich (t, x). Die Menge der $\mathcal{O}$-kompatiblen Kontrollprozesse bezüglich (t, x) bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t, x)$.

Zulässigkeit

Definition 3.6 (Zulässigkeit)

Seien $(t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t,x)$. Falls die Integrierbarkeitsbedingung

$$\mathrm{E}\Big[\int_t^T \big|f\big(X_{t,x}^{\nu}(s), \nu(s)\big)\big| \mathrm{d}s + \big|g\big(X_{t,x}^{\nu}(T)\big)\big|\Big] < \infty \tag{3.8}$$

erfüllt ist, bezeichnen wir den Kontrollprozess ν als **zulässig** bezüglich (t,x). Die Menge aller zulässigen Kontrollprozesse bezüglich (t,x) bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(t,x)$.