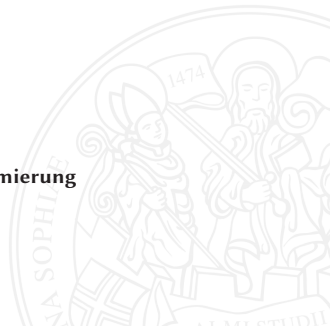


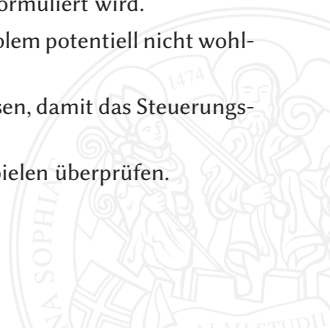
Klassische Steuerung – Problemformulierung

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Zielsetzung für diesen Abschnitt:

- (1) Sie kennen die folgenden Begriffe: Zustandsraum, Kontrollmenge, Kontrollprozess, Zustandsprozess, kontrollierte SDEs, Explosion, Performance-Funktional, Zulässigkeit, Wertfunktion.
- (2) Sie wissen, unter welchen Bedingungen kontrollierte SDEs eindeutige Lösungen besitzen.
- (3) Sie wissen, wie das allgemeine Steuerungsproblem formuliert wird.
- (4) Sie wissen, aus welchen Gründen das Steuerungsproblem potentiell nicht wohldefiniert sein könnte.
- (5) Sie wissen, welche Annahmen getroffen werden müssen, damit das Steuerungsproblem wohldefiniert ist.
- (6) Sie können die Wohldefiniiertheit in konkreten Beispielen überprüfen.



Das Fischereibeispiel:

- $\nu = \{\nu(t)\}_{t \in [0, T]}$ Abfischungsrate.
- $X^\nu = \{X^\nu(t)\}_{t \in [0, T]}$ Fischpopulation, gegeben als Lösung der SDE

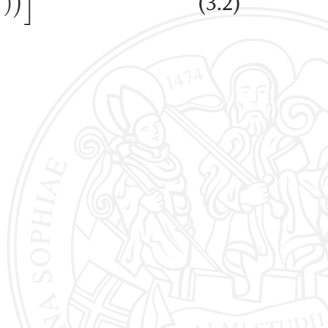
$$dX^\nu(t) = [b_0 - \nu(t)]X^\nu(t)dt + \sigma_0 X^\nu(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

mit $X^\nu(t) = x$, wobei $b_0, \sigma_0 > 0$.

- Optimierungsproblem: Für Borel-messbare $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, maximiere

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f(\nu(t)X^\nu(t))dt + g(X^\nu(T)) \right] \quad (3.2)$$

über die Wahl von ν .



Das Fischereibeispiel:

- $\nu = \{\nu(t)\}_{t \in [0, T]}$ Abfischungsrate.
- $X^\nu = \{X^\nu(t)\}_{t \in [0, T]}$ Fischpopulation, gegeben als Lösung der SDE

$$dX^\nu(t) = [b_0 - \nu(t)]X^\nu(t)dt + \sigma_0 X^\nu(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

mit $X^\nu(t) = x$, wobei $b_0, \sigma_0 > 0$.

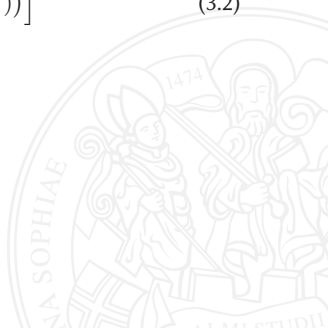
- Optimierungsproblem: Für Borel-messbare $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, maximiere

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f(\nu(t)X^\nu(t))dt + g(X^\nu(T)) \right] \quad (3.2)$$

über die Wahl von ν .

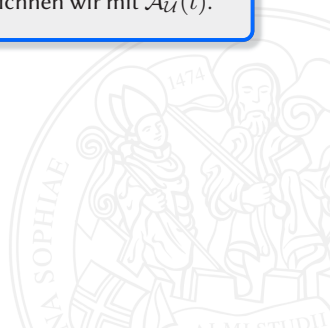
Frage: Ist hier alles wohldefiniert?

- (1) Existiert eine Lösung der SDE (3.1)?
- (2) ist der Erwartungswert in (3.2) wohldefiniert?



Definition 3.1 (Kontrollprozess)

Sei $t \in \bar{\mathcal{T}}$. Dann bezeichnen wir jeden \mathcal{U} -wertigen und \mathfrak{F}_t -vorhersagbaren stochastischen Prozess $\nu = \{\nu(s)\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_t}$ als **Kontrollprozess** auf $\bar{\mathcal{T}}_t$. Die Menge aller \mathcal{U} -wertigen Kontrollprozesse auf $\bar{\mathcal{T}}_t$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t)$.



Definition 3.2 (Zustandsprozess)

Seien $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t)$ ein Kontrollprozess auf $\bar{\mathcal{T}}_t$. Existiert eine eindeutige Lösung $X_{t,x}^{\nu} = \{X_{t,x}^{\nu}(s)\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_t}$ der kontrollierten stochastischen Differentialgleichung (3.3) mit $X_{t,x}^{\nu}(t) = x$ und

$$\mathbb{P}[X_{t,x}^{\nu}(s) \in \mathcal{O} \text{ für alle } s \in \bar{\mathcal{T}}_t] = 1, \quad (3.4)$$

dann nennen wir $X_{t,x}^{\nu}$ den **Zustandsprozess** bezüglich (t, x, ν) .

Definition 3.3 (Minimale Zulässigkeit)

Sei $t \in \bar{\mathcal{T}}$ gegeben. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}(t)$ die Menge aller Kontrollprozesse $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}(t)$ mit

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T |b(0, \nu(s))|^2 + |\sigma(0, \nu(s))|^2 ds \right] < \infty.$$

Einen solchen Kontrollprozess ν nennen wir **minimal zulässig**.

Lemma 3.4 (Existenz und Eindeutigkeit kontrollierter SDEs)

Sei $t \in \bar{\mathcal{T}}$ und sei $\nu \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}(t)$ minimal zulässig. Sei weiter ξ eine \mathbb{R}^d -wertige und $\mathfrak{F}(t)$ -messbare Zufallsvariable mit $E[|\xi|^p] < \infty$ für ein $p \geq 1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und eine eindeutige, stetige Lösung $X_{t,\xi}^\nu = \{X_{t,\xi}^\nu(s)\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_t}$ der kontrollierten SDE (3.3) mit $X_{t,\xi}^\nu(t) = \xi$ und

$$E \left[\sup_{s \in \bar{\mathcal{T}}_t} |X_{t,\xi}^\nu(s)|^p \right] \leq C(1 + E[|\xi|^p])e^{CT}. \quad (3.5)$$

Definition 3.5 (\mathcal{O} -Kompatibilität)

Seien $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^d}(t)$. Falls der Prozess $X_{t,x}^\nu = \{X_{t,x}^\nu(s)\}_{s \in \bar{\mathcal{T}}_t}$ ein Zustandsprozess ist, d.h. falls

$$\mathbb{P}[X_{t,x}^\nu(s) \in \mathcal{O} \text{ für alle } s \in \bar{\mathcal{T}}_t] = 1,$$

dann bezeichnen wir ν als **\mathcal{O} -kompatibel** bezüglich (t, x) . Die Menge der \mathcal{O} -kompatiblen Kontrollprozesse bezüglich (t, x) bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t, x)$.

Definition 3.6 (Zulässigkeit)

Seien $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und $\nu \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(t, x)$. Falls die Integrierbarkeitsbedingung

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T |f(X_{t,x}^\nu(s), \nu(s))| ds + |g(X_{t,x}^\nu(T))| \right] < \infty \quad (3.8)$$

erfüllt ist, bezeichnen wir den Kontrollprozess ν als **zulässig** bezüglich (t, x) . Die Menge aller zulässigen Kontrollprozesse bezüglich (t, x) bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(t, x)$.