Universität Trier

Stochastische Analysis

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Voraussetzungen für die Vorlesung

Im Rahmen der der Vorlesung setzen wir folgende Inhalte als bekannt voraus:

- **Stochastische Prozesse**
  - Brownsche Bewegung
  - (Sub-/Super-)Martingale
  - Optional Stopping/Sampling
  - (Markov-Eigenschaft)
- **Stochastische Analysis**
  - Stochastische Integration und Itô-Isommetrie
  - Itô-Formel
  - Stochastische Differentialgleichungen
  - Feynman-Kac Darstellung

Im Folgenden wiederholen wir in aller Kürze einige der Resultate. Für mehr Details und Beweise verweisen wir auf die **Skripte von Prof. Seifried**.

Optional Stopping

Theorem 2.1 (Optional Stopping)

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ ein rechtsstetiges **Submartingal** und seien σ und τ zwei $[0,T]$-wertige Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt

$$X(\sigma) \leq \mathrm{E}\big[X(\tau)\big|\mathfrak{F}(\sigma)\big].$$

Ist X ein **Martingal**, dann gilt sogar

$$X(\sigma) = \mathrm{E}\big[X(\tau)\big|\mathfrak{F}(\sigma)\big].$$

Optional Sampling

Theorem 2.2 (Optional Sampling)

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ ein rechtsstetiger Prozess. Dann ist X genau dann ein **Submartingal**, wenn

$$\mathrm{E}\big[X(\sigma)\big] \leq \mathrm{E}\big[X(\tau)\big] \qquad \text{für alle Stoppzeiten } \sigma, \tau \text{ mit } 0 \leq \sigma \leq \tau \leq T.$$

Darüber hinaus ist X genau dann ein **Martingal**, wenn

$$\mathrm{E}\big[X(0)\big] = \mathrm{E}\big[X(\tau)\big] \qquad \text{für alle Stoppzeiten } \tau \text{ mit } 0 \leq \tau \leq T.$$

Stochastisches Integral

Ein **Semi-Martingal** $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ ist ein Prozess, der sich als

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,T]$$

schreiben lässt, wobei

- $M = \{M(t)\}_{t\in[0,T]}$ ein lokales Martingal und
- $A = \{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ von endlicher Variation ist.

Die Zerlegung ist eindeutig, wenn $M(0) = A(0) = 0$.

Stochastisches Integral

Ein **Semi-Martingal** $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ ist ein Prozess, der sich als

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,T]$$

schreiben lässt, wobei

- $M = \{M(t)\}_{t\in[0,T]}$ ein lokales Martingal und
- $A = \{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ von endlicher Variation ist.

Die Zerlegung ist eindeutig, wenn $M(0) = A(0) = 0$.

Für einen vorhersagbaren Prozess $H = \{H(t)\}_{t\in[0,T]}$ mit $\int_0^T H(t)^2 \mathrm{d}\langle X\rangle(t) < \infty$ kann man dann das **stochastische Integral** definieren:

$$H \bullet X(t) = \int_0^t H(s)\mathrm{d}M(s) + \int_0^t H(s)\mathrm{d}A(s) \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Stochastisches Integral bezüglich W

In der Vorlesung betrachten wir ausschließlich das stochastische Integral bezüglich der **Brownschen Bewegung** $W = (W_1, \dots, W_n)^\top$. Sei $H = (H_1, \dots, H_n)$ ein stochastischer Prozess, so dass jedes H_i integrierbar bezüglich W_i ist. Dann ist

$$\int_0^t H(s)\mathrm{d}W(s) = \sum_{i=1}^n \int_0^t H_i(s)\mathrm{d}W_i(s), \qquad t \in [0, T],$$

ein Martingal, wenn

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[\int_0^T H_i(t)^2 \mathrm{d}\langle W_i \rangle(t)\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[\int_0^T H_i(t)^2 \mathrm{d}t\right] < \infty.$$

Stochastisches Integral bezüglich W

In der Vorlesung betrachten wir ausschließlich das stochastische Integral bezüglich der **Brownschen Bewegung** $W = (W_1, \dots, W_n)^\top$. Sei $H = (H_1, \dots, H_n)$ ein stochastischer Prozess, so dass jedes H_i integrierbar bezüglich W_i ist. Dann ist

$$\int_0^t H(s)\mathrm{d}W(s) = \sum_{i=1}^n \int_0^t H_i(s)\mathrm{d}W_i(s), \qquad t \in [0, T],$$

ein Martingal, wenn

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\Big[\int_0^T H_i(t)^2 \mathrm{d}\langle W_i \rangle(t)\Big] = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\Big[\int_0^T H_i(t)^2 \mathrm{d}t\Big] < \infty.$$

In diesem Fall gilt außerdem die **Itô-Isommetrie**:

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^t H(s)\mathrm{d}W(s)\Big)^2\Big] = \mathrm{E}\Big[\int_0^t \big|H_i(s)\big|^2 \mathrm{d}s\Big] \qquad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Die Itô-Formel

Sei X ein Semi-Martingal in $\mathbb{R}^d$ und $f \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^d)$ sei stetig auf $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. Dann ist $f(\cdot, X)$ ein Semi-Martingal und es gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) = f(0, X(0)) &+ \textstyle\int_0^t \partial_t f(s, X(s)) \mathrm{d}s \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x_i} f(s, X(s)) \mathrm{d}X_i(s) \\ &+ \textstyle\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{x_i x_j} f(s, X(s)) \mathrm{d}\langle X_i, X_j\rangle(s). \end{aligned}$$

Die Itô-Formel für Itô-Prozesse

Ist X ein **Itô-Prozess**, d.h.

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \tilde{b}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \tilde{\sigma}(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \in [0,T],$$

für vorhersagbare und genügend integrierbare Prozesse $\tilde{b}$ und $\tilde{\sigma}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}^{d\times n}$, dann gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) = f(0,X(0)) &+ \int_0^t \mathrm{D}_x f(s,X(s))^\top \tilde{\sigma}(s)\mathrm{d}W(s) \\ &+ \int_0^t \Big[\partial_t f(s,X(s)) + \tilde{b}(s)^\top \mathrm{D}_x f(s,X(s)) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\big[\tilde{\sigma}(s)\tilde{\sigma}(s)^\top \mathrm{D}_x^2 f(s,X(s))\big]\Big]\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Theorem 2.3 (Existenz und Eindeutigkeit für SDEs)

Wir nehmen an, dass eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{(\omega,t)\in\Omega\times[0,T]}\Big[\big|\hat{b}(\omega,t,x)-\hat{b}(\omega,t,y)\big|+\big|\hat{\sigma}(\omega,t,x)-\hat{\sigma}(\omega,t,y)\big|\Big] \leq L|x-y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und dass

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^T |\hat{b}(t,0)|^2 + |\hat{\sigma}(t,0)|^2 \mathrm{d}t\Big] < \infty.$$

Sei $t \in [0, T]$ und ξ eine $\mathfrak{F}(t)$-messbare und $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable mit $\mathrm{E}[|\xi|^p] < \infty$ für ein $p \geq 1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und eine eindeutige, stetige Lösung $X_{t,\xi} = \{X_{t,\xi}(s)\}_{s\in[t,T]}$ der SDE

$$\mathrm{d}X_{t,\xi}(s) = \hat{b}(s, X_{t,\xi}(s))\mathrm{d}s + \hat{\sigma}(s, X_{t,\xi}(s))\mathrm{d}W(s), \qquad s \in [t, T],$$

mit $X_{t,\xi}(t) = \xi$ und

$$\mathrm{E}\Big[\sup_{s\in[t,T]} |X_{t,\xi}(s)|^p\Big] \leq C\big(1 + \mathrm{E}[|\xi|^p]\big)e^{CT}.$$

Variation der Konstanten

Theorem 2.4 (Variation der Konstanten)

Seien $b = \{b(s)\}_{s\in[t,T]}$ und $\sigma = \{\sigma(s)\}_{s\in[t,T]}$ beschränkt und vorhersagbar mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^{1\times n}$. Dann ist die eindeutige Lösung $X_{t,x} = \{X_{t,x}(s)\}_{s\in[t,T]}$ der SDE

$$\mathrm{d}X_{t,x}(s) = b(s)X_{t,x}(s)\mathrm{d}s + \sigma(s)X_{t,x}(s)\mathrm{d}W(s), \qquad s \in [t,T],$$

mit $X_{t,x}(t) = x$ explizit gegeben durch

$$X_{t,x}(s) = x\exp\Big(\int_t^s \big[b(r) - \tfrac{1}{2}|\sigma(r)|^2\big]\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r)\mathrm{d}W(r)\Big), \quad s \in [t,T].$$

Feynman-Kac Darstellung

Theorem 2.5 (Feynman-Kac Darstellung)

Sei $V : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Lösung der PDE (2.3) mit Randbedingung (2.4) so dass $V \in C^{1,2}([0,T) \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Für $t \in [0,T]$ und $x \in \mathbb{R}^d$ sei darüber hinaus $X_{t,x} = \{X_{t,x}(s)\}_{s\in[t,T]}$ eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) mit $X_{t,x}(t) = x$ (und deterministischen $\hat{b}$ und $\hat{\sigma}$). Sei weiter angenommen, dass das lokale Martingal $M_{t,x} = \{M_{t,x}(s)\}_{s\in[t,T]}$ mit

$$M_{t,x}(s) \triangleq \int_t^s \mathrm{D}_x V\big(r, X_{t,x}(r)\big)\hat{\sigma}\big(r, X_{t,x}(r)\big)\mathrm{d}W(r), \qquad s \in [t,T],$$

ein echtes Martingal ist. Dann gilt die Feynman-Kac Darstellung

$$V(t,x) = \mathrm{E}\Big[\int_t^T f\big(r, X_{t,x}(r)\big)\mathrm{d}r + g\big(X_{t,x}(T)\big)\Big].$$