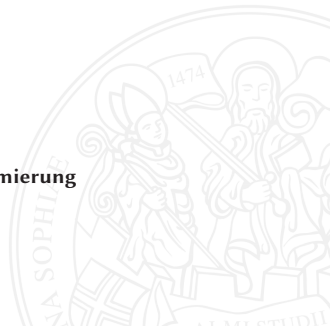


Stochastische Analysis

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Im Rahmen der der Vorlesung setzen wir folgende Inhalte als bekannt voraus:

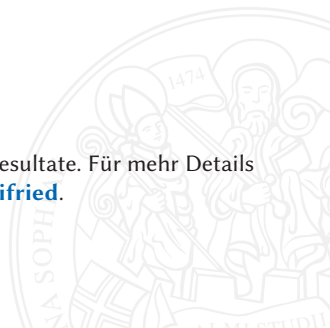
- **Stochastische Prozesse**

- Brownsche Bewegung
- (Sub-/Super-)Martingale
- Optional Stopping/Sampling
- (Markov-Eigenschaft)

- **Stochastische Analysis**

- Stochastische Integration und Itô-Isometrie
- Itô-Formel
- Stochastische Differentialgleichungen
- Feynman-Kac Darstellung

Im Folgenden wiederholen wir in aller Kürze einige der Resultate. Für mehr Details und Beweise verweisen wir auf die **Skripte von Prof. Seifried**.



Theorem 2.1 (Optional Stopping)

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ ein rechtsstetiges **Submartingal** und seien σ und τ zwei $[0, T]$ -wertige Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt

$$X(\sigma) \leq \mathbb{E}[X(\tau) | \mathfrak{F}(\sigma)].$$

Ist X ein **Martingal**, dann gilt sogar

$$X(\sigma) = \mathbb{E}[X(\tau) | \mathfrak{F}(\sigma)].$$



Theorem 2.2 (Optional Sampling)

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ ein rechtsstetiger Prozess. Dann ist X genau dann ein **Submartingal**, wenn

$$\mathbb{E}[X(\sigma)] \leq \mathbb{E}[X(\tau)] \quad \text{für alle Stoppszeiten } \sigma, \tau \text{ mit } 0 \leq \sigma \leq \tau \leq T.$$

Darüber hinaus ist X genau dann ein **Martingal**, wenn

$$\mathbb{E}[X(0)] = \mathbb{E}[X(\tau)] \quad \text{für alle Stoppszeiten } \tau \text{ mit } 0 \leq \tau \leq T.$$

Ein **Semi-Martingal** $X = \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ ist ein Prozess, der sich als

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

schreiben lässt, wobei

- $M = \{M(t)\}_{t \in [0, T]}$ ein lokales Martingal und
- $A = \{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ von endlicher Variation ist.

Die Zerlegung ist eindeutig, wenn $M(0) = A(0) = 0$.



Ein **Semi-Martingal** $X = \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ ist ein Prozess, der sich als

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

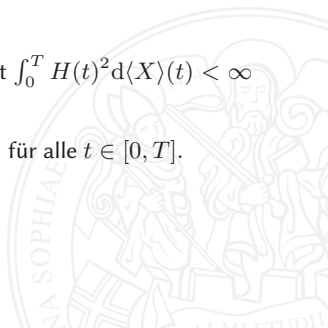
schreiben lässt, wobei

- $M = \{M(t)\}_{t \in [0, T]}$ ein lokales Martingal und
- $A = \{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ von endlicher Variation ist.

Die Zerlegung ist eindeutig, wenn $M(0) = A(0) = 0$.

Für einen vorhersagbaren Prozess $H = \{H(t)\}_{t \in [0, T]}$ mit $\int_0^T H(t)^2 d\langle X \rangle(t) < \infty$ kann man dann das **stochastische Integral** definieren:

$$H \bullet X(t) = \int_0^t H(s) dM(s) + \int_0^t H(s) dA(s) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$



Stochastisches Integral bezüglich W

In der Vorlesung betrachten wir ausschließlich das stochastische Integral bezüglich der **Brownschen Bewegung** $W = (W_1, \dots, W_n)^\top$. Sei $H = (H_1, \dots, H_n)$ ein stochastischer Prozess, so dass jedes H_i integrierbar bezüglich W_i ist. Dann ist

$$\int_0^t H(s) dW(s) = \sum_{i=1}^n \int_0^t H_i(s) dW_i(s), \quad t \in [0, T],$$

ein Martingal, wenn

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\int_0^T H_i(t)^2 d\langle W_i \rangle(t) \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\int_0^T H_i(t)^2 dt \right] < \infty.$$



Stochastisches Integral bezüglich W

In der Vorlesung betrachten wir ausschließlich das stochastische Integral bezüglich der **Brownschen Bewegung** $W = (W_1, \dots, W_n)^\top$. Sei $H = (H_1, \dots, H_n)$ ein stochastischer Prozess, so dass jedes H_i integrierbar bezüglich W_i ist. Dann ist

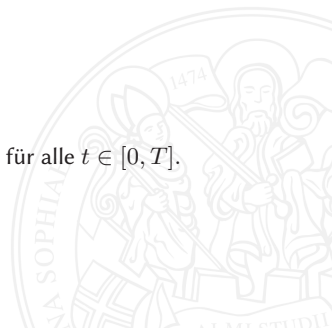
$$\int_0^t H(s) dW(s) = \sum_{i=1}^n \int_0^t H_i(s) dW_i(s), \quad t \in [0, T],$$

ein Martingal, wenn

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\int_0^T H_i(t)^2 d\langle W_i \rangle(t) \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\int_0^T H_i(t)^2 dt \right] < \infty.$$

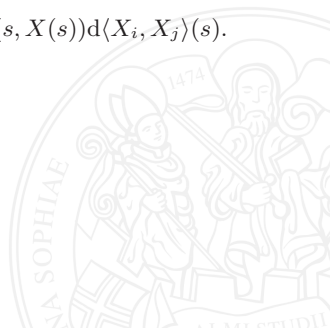
In diesem Fall gilt außerdem die **Itô-Isometrie**:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H(s) dW(s) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t |H_i(s)|^2 ds \right] \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$



Sei X ein Semi-Martingal in \mathbb{R}^d und $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ sei stetig auf $[0, T] \times \mathbb{R}^d$.
Dann ist $f(\cdot, X)$ ein Semi-Martingal und es gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t \partial_t f(s, X(s)) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x_i} f(s, X(s)) dX_i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{x_i x_j} f(s, X(s)) d\langle X_i, X_j \rangle(s). \end{aligned}$$



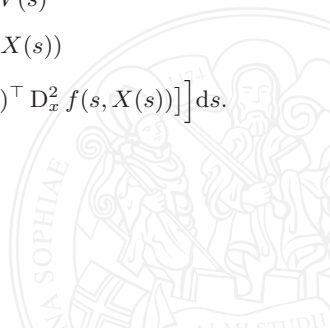
Die Itô-Formel für Itô-Prozesse

Ist X ein **Itô-Prozess**, d.h.

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \tilde{b}(s) ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(s) dW(s), \quad t \in [0, T],$$

für vorhersagbare und genügend integrierbare Prozesse \tilde{b} und $\tilde{\sigma}$ mit Werten in \mathbb{R}^d und $\mathbb{R}^{d \times n}$, dann gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t D_x f(s, X(s))^\top \tilde{\sigma}(s) dW(s) \\ &\quad + \int_0^t \left[\partial_t f(s, X(s)) + \tilde{b}(s)^\top D_x f(s, X(s)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\tilde{\sigma}(s) \tilde{\sigma}(s)^\top D_x^2 f(s, X(s))] \right] ds. \end{aligned}$$



Theorem 2.3 (Existenz und Eindeutigkeit für SDEs)

Wir nehmen an, dass eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass

$$\sup_{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]} \left[|\hat{b}(\omega, t, x) - \hat{b}(\omega, t, y)| + |\hat{\sigma}(\omega, t, x) - \hat{\sigma}(\omega, t, y)| \right] \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und dass

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\hat{b}(t, 0)|^2 + |\hat{\sigma}(t, 0)|^2 dt \right] < \infty.$$

Sei $t \in [0, T]$ und ξ eine $\mathfrak{F}(t)$ -messbare und \mathbb{R}^d -wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|\xi|^p] < \infty$ für ein $p \geq 1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ und eine eindeutige, stetige Lösung $X_{t, \xi} = \{X_{t, \xi}(s)\}_{s \in [t, T]}$ der SDE

$$dX_{t, \xi}(s) = \hat{b}(s, X_{t, \xi}(s))ds + \hat{\sigma}(s, X_{t, \xi}(s))dW(s), \quad s \in [t, T],$$

mit $X_{t, \xi}(t) = \xi$ und

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [t, T]} |X_{t, \xi}(s)|^p \right] \leq C(1 + \mathbb{E}[|\xi|^p])e^{CT}.$$

Theorem 2.4 (Variation der Konstanten)

Seien $b = \{b(s)\}_{s \in [t, T]}$ und $\sigma = \{\sigma(s)\}_{s \in [t, T]}$ beschränkt und vorhersagbar mit Werten in \mathbb{R} bzw. $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Dann ist die eindeutige Lösung $X_{t,x} = \{X_{t,x}(s)\}_{s \in [t, T]}$ der SDE

$$dX_{t,x}(s) = b(s)X_{t,x}(s)ds + \sigma(s)X_{t,x}(s)dW(s), \quad s \in [t, T],$$

mit $X_{t,x}(t) = x$ explizit gegeben durch

$$X_{t,x}(s) = x \exp\left(\int_t^s [b(r) - \frac{1}{2}|\sigma(r)|^2]dr + \int_t^s \sigma(r)dW(r)\right), \quad s \in [t, T].$$

Theorem 2.5 (Feynman-Kac Darstellung)

Sei $V : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der PDE (2.3) mit Randbedingung (2.4) so dass $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d) \cap C([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. Für $t \in [0, T]$ und $x \in \mathbb{R}^d$ sei darüber hinaus $X_{t,x} = \{X_{t,x}(s)\}_{s \in [t, T]}$ eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.2) mit $X_{t,x}(t) = x$ (und deterministischen \hat{b} und $\hat{\sigma}$). Sei weiter angenommen, dass das lokale Martingal $M_{t,x} = \{M_{t,x}(s)\}_{s \in [t, T]}$ mit

$$M_{t,x}(s) \triangleq \int_t^s D_x V(r, X_{t,x}(r)) \hat{\sigma}(r, X_{t,x}(r)) dW(r), \quad s \in [t, T],$$

ein echtes Martingal ist. Dann gilt die Feynman-Kac Darstellung

$$V(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_t^T f(r, X_{t,x}(r)) dr + g(X_{t,x}(T)) \right].$$