

Zufallsmaße und der Poisson Prozess

Tutorium Stochastische Prozesse
22. November 2016



Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Übungsaufgabe: Random Walk hat unabhängige & stationäre Inkremente
- (2) Modellieren mit Zufallsmaßen
- (3) Der Poisson Prozess und seine Eigenschaften



Frage: Was ist ein Poisson Zufallsmaß?



Frage: Was ist ein Poisson Zufallsmaß?

Definition (Poisson Zufallsmaß)

Sei (S, \mathfrak{G}, μ) ein Maßraum. Dann heißt eine Abbildung

$$\Gamma : \Omega \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

Poisson Zufallsmaß mit Intensität μ , falls gilt:

- (R1)** $\Gamma(\omega, \cdot)$ ist ein Zählmaß auf (S, \mathfrak{G}) für alle $\omega \in \Omega$.
- (R2)** $\Gamma(\cdot, B)$ ist eine Zufallsvariable für alle $B \in \mathfrak{G}$.
- (R3)** Die Zufallsvariablen $\Gamma(\cdot, B_1), \dots, \Gamma(\cdot, B_n)$ sind unabhängig für alle disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{G}$.
- (R4)** $\Gamma(\cdot, B)$ ist Poisson-verteilt mit Intensität $\mu(B)$.

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?



Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.



Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.



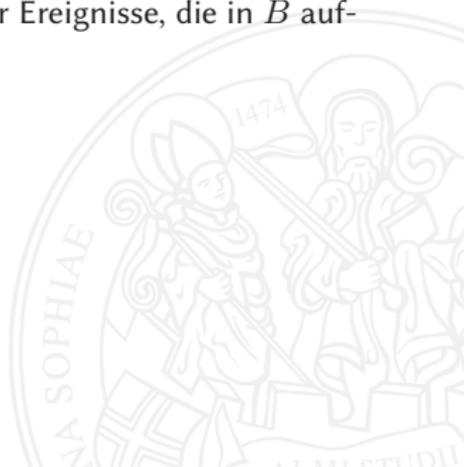
Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.



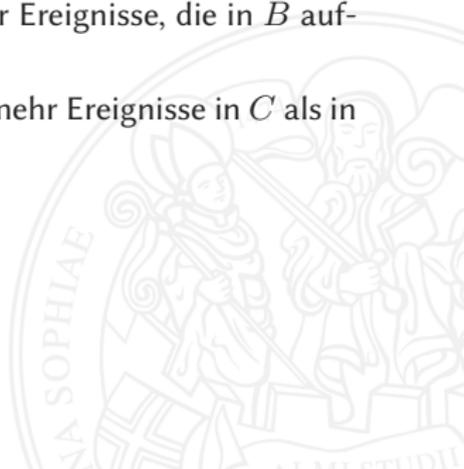
Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.
- Da $\Gamma(\cdot, B)$ eine Zufallsvariable ist, ist die Anzahl der Ereignisse, die in B auftreten, Poisson verteilt, also **zufällig**.



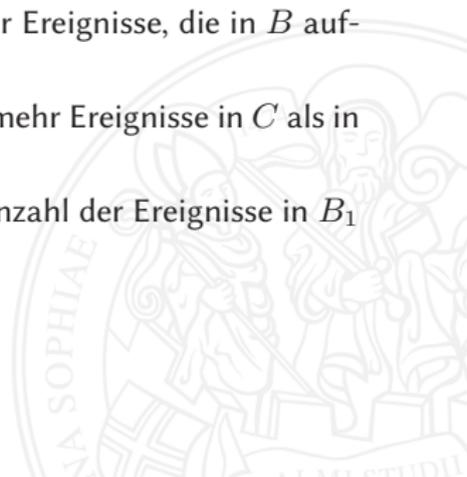
Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.
- Da $\Gamma(\cdot, B)$ eine Zufallsvariable ist, ist die Anzahl der Ereignisse, die in B auftreten, Poisson verteilt, also **zufällig**.
- Insbesondere, falls $B \subset C \in \mathfrak{G}$, dann erwarten wir mehr Ereignisse in C als in B , da $\mu(C) \geq \mu(B)$.



Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.
- Da $\Gamma(\cdot, B)$ eine Zufallsvariable ist, ist die Anzahl der Ereignisse, die in B auftreten, Poisson verteilt, also **zufällig**.
- Insbesondere, falls $B \subset C \in \mathfrak{S}$, dann erwarten wir mehr Ereignisse in C als in B , da $\mu(C) \geq \mu(B)$.
- Betrachten wir disjunkte B_1 und B_2 , dann ist die Anzahl der Ereignisse in B_1 **unabhängig** von der Anzahl der Ereignisse in B_2 .



Beispiel: Kästchen

Beispiel: Gegeben seien n Kästchen K_1, \dots, K_n . Wir legen eine zufällige Anzahl von Steinen zufällig in die Kästchen.

Aufgabe: Konstruiere ein Zufallsmaß, das diese Situation modelliert. Unter welchen Bedingungen handelt es sich um ein Poisson Zufallsmaß?



Frage: Was haben Poisson Zufallsmaße mit stochastischen Prozessen zu tun?



Frage: Was haben Poisson Zufallsmaße mit stochastischen Prozessen zu tun?

Definition (Poisson Prozess)

Sei $S = [0, \infty)$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}([0, \infty))$, $\vartheta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ messbar und Lebesgue-integrierbar. Definiere ein Maß

$$\mu : \mathfrak{B}([0, \infty)) \rightarrow [0, \infty), \quad \mu(B) \triangleq \int_B \vartheta(t) dt.$$

Bezeichne mit Γ das zugehörige Poisson Zufallsmaß. Dann nennen wir den stochastischen Prozess $N = \{N(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ mit

$$N(t) \triangleq \Gamma([0, t]) \quad \text{für alle } t \in [0, \infty)$$

den **Poisson Prozess** mit Intensität ϑ .

Frage: Welche Eigenschaften hat der Poisson Prozess?