Universität Trier

Zufallsmaße und der Poisson Prozess

Tutorium Stochastische Prozesse

22. November 2016

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Übungsaufgabe: Random Walk hat unabhängige & stationäre Inkremente

(2) Modellieren mit Zufallsmaßen

(3) Der Poisson Prozess und seine Eigenschaften

Poisson Zufallsmaß

Frage: Was ist ein Poisson Zufallsmaß?

Poisson Zufallsmaß

Frage: Was ist ein Poisson Zufallsmaß?

Definition (Poisson Zufallsmaß)

Sei $(S, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Dann heißt eine Abbildung

$$\Gamma : \Omega \times \mathfrak{S} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

Poisson Zufallsmaß mit Intensität μ, falls gilt:

(R1) $\Gamma(\omega, \cdot)$ ist ein Zählmaß auf $(S, \mathfrak{S})$ für alle $\omega \in \Omega$.

(R2) $\Gamma(\cdot, B)$ ist eine Zufallsvariable für alle $B \in \mathfrak{S}$.

(R3) Die Zufallsvariablen $\Gamma(\cdot, B_1), \ldots, \Gamma(\cdot, B_n)$ sind unabhängig für alle disjunkten Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{S}$.

(R4) $\Gamma(\cdot, B)$ ist Poisson-verteilt mit Intensität $\mu(B)$.

Etwas Intuition

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

Etwas Intuition

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.

Etwas Intuition

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.

Etwas Intuition

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.

Etwas Intuition

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.
- Da $\Gamma(\cdot, B)$ eine Zufallsvariable ist, ist die Anzahl der Ereignisse, die in B auftreten, Poisson verteilt, also **zufällig**.

Etwas Intuition

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.
- Da $\Gamma(\cdot, B)$ eine Zufallsvariable ist, ist die Anzahl der Ereignisse, die in B auftreten, Poisson verteilt, also **zufällig**.
- Insbesondere, falls $B \subset C \in \mathfrak{S}$, dann erwarten wir mehr Ereignisse in C als in B, da $\mu(C) \geq \mu(B)$.

Etwas Intuition

Wie können wir Poisson Zufallsmaße verstehen?

- $\Gamma(\omega, B)$ ist eine natürliche Zahl. Für festes ω und festes B **zählen wir also Ereignisse**, die in B auftreten.
- In der Vorlesung ist typischerweise $S = [0, \infty)$, $B = [0, t]$. Das heißt also, wir zählen die Anzahl der Ereignisse im Zeitintervall $[0, t]$.
- Um welche Ereignisse es sich handelt ist uns (noch) egal. Hauptsache wir können diese Ereignisse zählen.
- Da $\Gamma(\cdot, B)$ eine Zufallsvariable ist, ist die Anzahl der Ereignisse, die in B auftreten, Poisson verteilt, also **zufällig**.
- Insbesondere, falls $B \subset C \in \mathfrak{S}$, dann erwarten wir mehr Ereignisse in C als in B, da $\mu(C) \geq \mu(B)$.
- Betrachten wir disjunkte B_1 und B_2, dann ist die Anzahl der Ereignisse in B_1 **unabhängig** von der Anzahl der Ereignisse in B_2.

Beispiel: Kästchen

Beispiel: Gegeben seien n Kästchen $K_1, \ldots, K_n$. Wir legen eine zufällige Anzahl von Steinen zufällig in die Kästchen.

Aufgabe: Konstruiere ein Zufallsmaß, das diese Situation modelliert. Unter welchen Bedingungen handelt es sich um ein Poisson Zufallsmaß?

Der Poisson Prozess

Frage: Was haben Poisson Zufallsmaße mit stochastischen Prozessen zu tun?

Der Poisson Prozess

Frage: Was haben Poisson Zufallsmaße mit stochastischen Prozessen zu tun?

Definition (Poisson Prozess)

Sei $S = [0,\infty)$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}([0,\infty))$, $\vartheta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ messbar und Lebesgue-integrierbar. Definiere ein Maß

$$\mu : \mathfrak{B}([0,\infty)) \to [0,\infty), \qquad \mu(B) \triangleq \int_B \vartheta(t)\mathrm{d}t.$$

Bezeichne mit Γ das zugehörige Poisson Zufallsmaß. Dann nennen wir den stochastischen Prozess $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ mit

$$N(t) \triangleq \Gamma([0,t]) \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty)$$

den **Poisson Prozess** mit Intensität ϑ.

Frage: Welche Eigenschaften hat der Poisson Prozess?