

# Stoppszeiten und Charakteristische Funktionen

**Tutorium Stochastische Prozesse**  
15. November 2016



Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Eindeutigkeit von Maßen ohne schnittstabilen Erzeuger
- (2) Stoppzeiten: Beispiele und Gegenbeispiele
- (3) Wiederholung: Charakteristische Funktionen



## Stoppszeiten: Beispiele und Gegenbeispiele



# Definition: Stoppzeiten

**Frage:** Was ist eine Stoppzeit?



# Definition: Stoppzeiten

**Frage:** Was ist eine Stoppzeit?

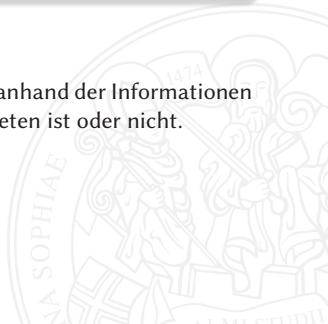
## Definition (Stoppzeit)

Eine Abbildung  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$  heißt **Stoppzeit** bezüglich der Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ , wenn

$$\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{F}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Intuitiv bedeutet dies, dass wir zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathcal{T}$  anhand der Informationen  $\mathfrak{F}(t)$  entscheiden können, ob die Stoppzeit bereits eingetreten ist oder nicht.

**Frage:** Sind Stoppzeiten Zufallsvariablen?



# Beispiele zu Stoppzeiten

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ . Definiere  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$  durch

$$\tau \triangleq \arg \max_{t \in \mathcal{T}} \{X(t)\}.$$

**Frage:** Ist  $\tau$  eine Stoppzeit?



# Beispiele zu Stoppzeiten

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ . Definiere  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$  durch

$$\tau \triangleq \arg \max_{t \in \mathcal{T}} \{X(t)\}.$$

**Frage:** Ist  $\tau$  eine Stoppzeit?

**Antwort:** Im Allgemeinen nein, da wir zum festen Zeitpunkt  $t$  noch nicht wissen, ob das Maximum bereits angenommen wurde oder nicht. In degenerierten Fällen kann  $\tau$  aber durchaus eine Stoppzeit sein.



# Beispiele zu Stoppzeiten

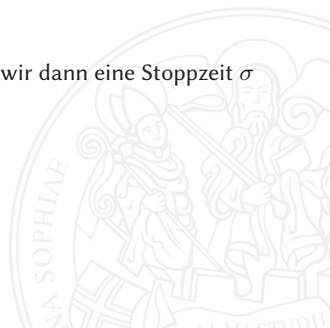
Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ . Definiere  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$  durch

$$\tau \triangleq \arg \max_{t \in \mathcal{T}} \{X(t)\}.$$

**Frage:** Ist  $\tau$  eine Stoppzeit?

**Antwort:** Im Allgemeinen nein, da wir zum festen Zeitpunkt  $t$  noch nicht wissen, ob das Maximum bereits angenommen wurde oder nicht. In degenerierten Fällen kann  $\tau$  aber durchaus eine Stoppzeit sein.

**Frage:** Seien  $\tau_1$  und  $\tau_2$  Stoppzeiten mit  $\tau_1 < \tau_2$ . Können wir dann eine Stoppzeit  $\sigma$  finden, die  $\tau_1 < \sigma < \tau_2$  erfüllt?





# Beispiele zu Stoppzeiten

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ . Definiere  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$  durch

$$\tau \triangleq \arg \max_{t \in \mathcal{T}} \{X(t)\}.$$

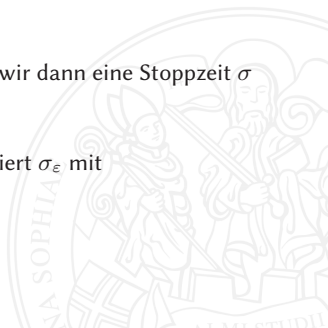
**Frage:** Ist  $\tau$  eine Stoppzeit?

**Antwort:** Im Allgemeinen nein, da wir zum festen Zeitpunkt  $t$  noch nicht wissen, ob das Maximum bereits angenommen wurde oder nicht. In degenerierten Fällen kann  $\tau$  aber durchaus eine Stoppzeit sein.

**Frage:** Seien  $\tau_1$  und  $\tau_2$  Stoppzeiten mit  $\tau_1 < \tau_2$ . Können wir dann eine Stoppzeit  $\sigma$  finden, die  $\tau_1 < \sigma < \tau_2$  erfüllt?

**Antwort:** Im Allgemeinen nein. Aber: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert  $\sigma_\varepsilon$  mit

$$\mathbb{P}[\tau_1 < \sigma_\varepsilon < \tau_2] \geq 1 - \varepsilon.$$



# Definition: Hitting Times

**Frage:** Was ist eine Hitting Time / Eintrittszeit?



# Definition: Hitting Times

**Frage:** Was ist eine Hitting Time / Eintrittszeit?

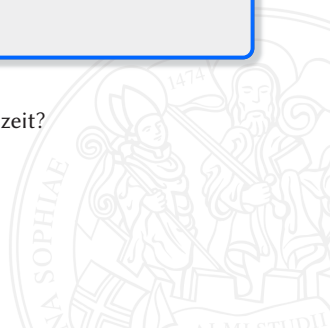
## Definition (Hitting Time)

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger,  $\mathfrak{F}$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borel-Menge. Dann nennen  $\tau_B : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$  gegeben durch

$$\tau_B \triangleq \inf\{t \in \mathcal{T} : X(t) \in B\}$$

die **Hitting Time** der Menge  $B$ .

**Frage:** Unter welchen Voraussetzungen ist  $\tau_B$  eine Stoppzeit?



# Definition: Hitting Times

**Frage:** Was ist eine Hitting Time / Eintrittszeit?

## Definition (Hitting Time)

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger,  $\mathfrak{F}$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borel-Menge. Dann nennen  $\tau_B : \Omega \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\infty\}$  gegeben durch

$$\tau_B \triangleq \inf\{t \in \mathcal{T} : X(t) \in B\}$$

die **Hitting Time** der Menge  $B$ .

**Frage:** Unter welchen Voraussetzungen ist  $\tau_B$  eine Stoppzeit?

**Antwort:** Im Allgemeinen äußerst schwierig zu beantworten. Die Antwort ist zum Beispiel positiv, wenn  $\mathcal{T}$  endlich ist (Proposition 3).

# Beispiele: Hitting Times

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger,  $\mathfrak{F}$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

**Beispiel 1:** Ist  $X$  stetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$

**Beispiel 2:** Ist  $X$  linksstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$

**Beispiel 3:** Ist  $X$  stetig und  $B$  offen, dann ist  $\tau_B$

**Beispiel 4:** Ist  $X$  rechtsstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$



# Beispiele: Hitting Times

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger,  $\mathfrak{F}$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

**Beispiel 1:** Ist  $X$  stetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  eine Stoppzeit.

**Beispiel 2:** Ist  $X$  linksstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$

**Beispiel 3:** Ist  $X$  stetig und  $B$  offen, dann ist  $\tau_B$

**Beispiel 4:** Ist  $X$  rechtsstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$



# Beispiele: Hitting Times

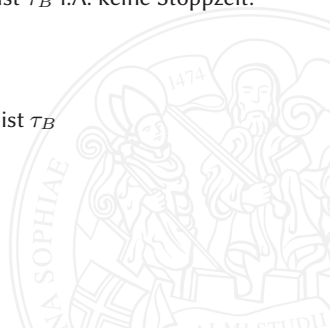
Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger,  $\mathfrak{F}$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

**Beispiel 1:** Ist  $X$  stetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  eine Stoppzeit.

**Beispiel 2:** Ist  $X$  linksstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  i.A. keine Stoppzeit.

**Beispiel 3:** Ist  $X$  stetig und  $B$  offen, dann ist  $\tau_B$

**Beispiel 4:** Ist  $X$  rechtsstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$



# Beispiele: Hitting Times

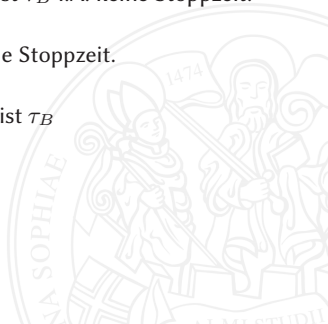
Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger,  $\mathfrak{F}$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

**Beispiel 1:** Ist  $X$  stetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  eine Stoppzeit.

**Beispiel 2:** Ist  $X$  linksstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  i.A. keine Stoppzeit.

**Beispiel 3:** Ist  $X$  stetig und  $B$  offen, dann ist  $\tau_B$  i.A. keine Stoppzeit.

**Beispiel 4:** Ist  $X$  rechtsstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$





# Beispiele: Hitting Times

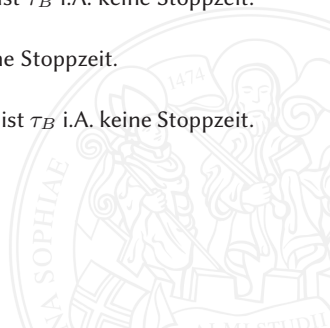
Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger,  $\mathfrak{F}$ -adaptierter stochastischer Prozess und  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

**Beispiel 1:** Ist  $X$  stetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  eine Stoppzeit.

**Beispiel 2:** Ist  $X$  linksstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  i.A. keine Stoppzeit.

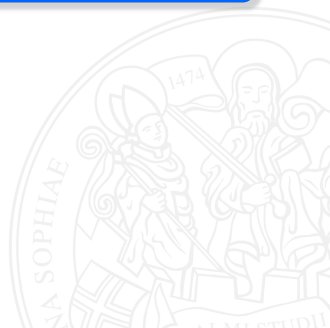
**Beispiel 3:** Ist  $X$  stetig und  $B$  offen, dann ist  $\tau_B$  i.A. keine Stoppzeit.

**Beispiel 4:** Ist  $X$  rechtsstetig und  $B$  abgeschlossen, dann ist  $\tau_B$  i.A. keine Stoppzeit.



## Theorem (Messbarkeit von Hitting Times)

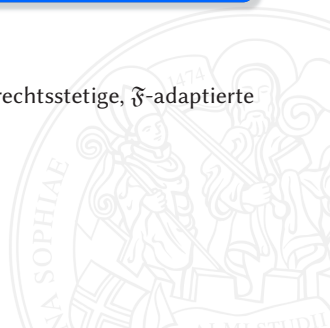
Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein **progressiv messbarer** Prozess mit Werten in einem topologischen Raum  $S$  mit Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{G}$ . Angenommen, die Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ist **rechtsstetig**, d.h.  $\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(t+)$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ , und **vollständig**, d.h. jedes  $\mathfrak{F}(t)$  enthält alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen. Sei weiter  $B \in \mathfrak{G}$  eine beliebige **Borel-Menge**. Dann ist die Hitting Time  $\tau_B$  von  $B$  eine Stoppzeit.



## Theorem (Messbarkeit von Hitting Times)

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein **progressiv messbarer** Prozess mit Werten in einem topologischen Raum  $S$  mit Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{G}$ . Angenommen, die Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ist **rechtsstetig**, d.h.  $\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(t+)$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ , und **vollständig**, d.h. jedes  $\mathfrak{F}(t)$  enthält alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen. Sei weiter  $B \in \mathfrak{G}$  eine beliebige **Borel-Menge**. Dann ist die Hitting Time  $\tau_B$  von  $B$  eine Stoppzeit.

**Bemerkung:** Man kann zeigen, dass alle links- und alle rechtsstetige,  $\mathfrak{F}$ -adaptierte Prozesse progressiv messbar ist.



## Theorem (Messbarkeit von Hitting Times)

Sei  $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ein **progressiv messbarer** Prozess mit Werten in einem topologischen Raum  $S$  mit Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{G}$ . Angenommen, die Filtrierung  $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ist **rechtsstetig**, d.h.  $\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(t+)$  für alle  $t \in \mathcal{T}$ , und **vollständig**, d.h. jedes  $\mathfrak{F}(t)$  enthält alle  $\mathbb{P}$ -Nullmengen. Sei weiter  $B \in \mathfrak{G}$  eine beliebige **Borel-Menge**. Dann ist die Hitting Time  $\tau_B$  von  $B$  eine Stoppzeit.

**Bemerkung:** Man kann zeigen, dass alle links- und alle rechtsstetige,  $\mathfrak{F}$ -adaptierte Prozesse progressiv messbar ist.

**Bemerkung:** Die Annahme, dass  $\mathfrak{F}$  vollständig und rechtsstetig ist, bezeichnet man typischerweise als die **Usual Conditions**.

## Charakteristische Funktionen



# Definition: Hitting Times

**Frage:** Was ist eine charakteristische Funktion?



# Definition: Hitting Times

**Frage:** Was ist eine charakteristische Funktion?

## Definition (Charakteristische Funktion)

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable. Dann nennen wir die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\varphi_X(y) \triangleq \mathbb{E}[e^{iyX}] \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}$$

die **charakteristische Funktion** von  $X$ .

# Definition: Hitting Times

**Frage:** Was ist eine charakteristische Funktion?

## Definition (Charakteristische Funktion)

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable. Dann nennen wir die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\varphi_X(y) \triangleq \mathbb{E}[e^{iyX}] \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}$$

die **charakteristische Funktion** von  $X$ .

**Bemerkung:** Die charakteristische Funktion bestimmt die Verteilung von  $X$  eindeutig.

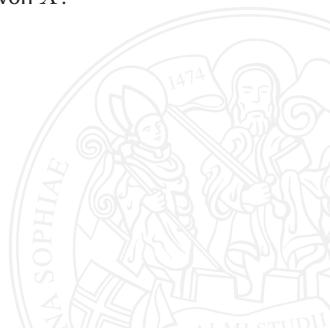


# Beispiel: Poisson-Verteilung

Sei  $X$  eine **Poisson-verteilte Zufallsvariable** mit Parameter  $\lambda > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}[X = k] =$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von  $X$ .



# Beispiel: Poisson-Verteilung

Sei  $X$  eine **Poisson-verteilte Zufallsvariable** mit Parameter  $\lambda > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von  $X$ .



# Beispiel: Poisson-Verteilung

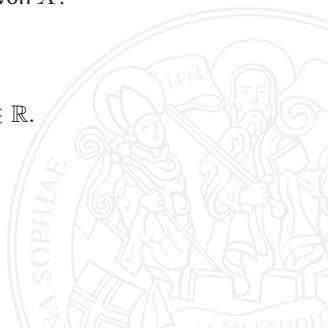
Sei  $X$  eine **Poisson-verteilte Zufallsvariable** mit Parameter  $\lambda > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

**Aufgabe:** Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von  $X$ .

**Lösung:** Die charakteristische Funktion  $\varphi_X$  von  $X$  ist

$$\varphi_X(y) = e^{\lambda(e^{iy} - 1)} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$



## Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und sei  $X$  eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

## Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und sei  $X$  eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert in Verteilung gegen  $X$ .

## Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und sei  $X$  eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert in Verteilung gegen  $X$ .
- (ii)  $\varphi$  ist die charakteristische Funktion von  $X$ .

## Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und sei  $X$  eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert in Verteilung gegen  $X$ .
- (ii)  $\varphi$  ist die charakteristische Funktion von  $X$ .
- (iii)  $\varphi$  ist stetig.

## Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und sei  $X$  eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert in Verteilung gegen  $X$ .
- (ii)  $\varphi$  ist die charakteristische Funktion von  $X$ .
- (iii)  $\varphi$  ist stetig.
- (iv)  $\varphi$  ist stetig in 0.



**Frage:** Wie hängt  $\varphi_X$  mit den Momenten von  $X$  zusammen?



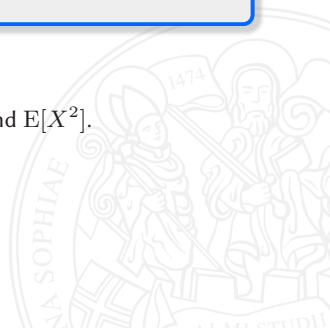
**Frage:** Wie hängt  $\varphi_X$  mit den Momenten von  $X$  zusammen?

## Theorem

Sei  $E[|X|^{k_0}] < \infty$  für ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$E[X^k] = i^{-k} \frac{d^k}{dy^k} \varphi_X(y) \Big|_{y=0} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \leq k_0.$$

**Aufgabe:** Sei  $X$  Poisson-verteilt. Bestimmen Sie  $E[X]$  und  $E[X^2]$ .



**Frage:** Wie hängt  $\varphi_X$  mit den Momenten von  $X$  zusammen?

## Theorem

Sei  $E[|X|^{k_0}] < \infty$  für ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$E[X^k] = i^{-k} \frac{d^k}{dy^k} \varphi_X(y) \Big|_{y=0} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \leq k_0.$$

**Aufgabe:** Sei  $X$  Poisson-verteilt. Bestimmen Sie  $E[X]$  und  $E[X^2]$ .

**Lösung:**  $E[X] = \lambda$  und  $E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$ .

