Universität Trier

Stoppzeiten und Charakteristische Funktionen

Tutorium Stochastische Prozesse

15. November 2016

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Eindeutigkeit von Maßen ohne schnittstabilen Erzeuger
(2) Stoppzeiten: Beispiele und Gegenbeispiele
(3) Wiederholung: Charakteristische Funktionen

Stoppzeiten: Beispiele und Gegenbeispiele

Definition: Stoppzeiten

Frage: Was ist eine Stoppzeit?

Definition: Stoppzeiten

Frage: Was ist eine Stoppzeit?

Definition (Stoppzeit)

Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** bezüglich der Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, wenn

$$\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{F}(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Intuitiv bedeutet dies, dass wir zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$ anhand der Informationen $\mathfrak{F}(t)$ entscheiden können, ob die Stoppzeit bereits eingetreten ist oder nicht.

Frage: Sind Stoppzeiten Zufallsvariablen?

Beispiele zu Stoppzeiten

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$. Definiere $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ durch

$$\tau \triangleq \arg\max_{t \in \mathcal{T}} \{X(t)\}.$$

Frage: Ist τ eine Stoppzeit?

Beispiele zu Stoppzeiten

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$. Definiere $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ durch

$$\tau \triangleq \arg\max_{t \in \mathcal{T}} \{X(t)\}.$$

Frage: Ist τ eine Stoppzeit?

Antwort: Im Allgemeinen nein, da wir zum festen Zeitpunkt t noch nicht wissen, ob das Maximum bereits angenommen wurde oder nicht. In degenerierten Fällen kann τ aber durchaus eine Stoppzeit sein.

Beispiele zu Stoppzeiten

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$. Definiere $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ durch

$$\tau \triangleq \arg\max_{t\in\mathcal{T}} \{X(t)\}.$$

Frage: Ist τ eine Stoppzeit?

Antwort: Im Allgemeinen nein, da wir zum festen Zeitpunkt t noch nicht wissen, ob das Maximum bereits angenommen wurde oder nicht. In degenerierten Fällen kann τ aber durchaus eine Stoppzeit sein.

Frage: Seien τ_1 und τ_2 Stoppzeiten mit $\tau_1 < \tau_2$. Können wir dann eine Stoppzeit σ finden, die $\tau_1 < \sigma < \tau_2$ erfüllt?

Beispiele zu Stoppzeiten

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess, adaptiert an eine Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$. Definiere $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ durch

$$\tau \triangleq \arg\max_{t\in\mathcal{T}}\{X(t)\}.$$

Frage: Ist τ eine Stoppzeit?

Antwort: Im Allgemeinen nein, da wir zum festen Zeitpunkt t noch nicht wissen, ob das Maximum bereits angenommen wurde oder nicht. In degenerierten Fällen kann τ aber durchaus eine Stoppzeit sein.

Frage: Seien τ_1 und τ_2 Stoppzeiten mit $\tau_1 < \tau_2$. Können wir dann eine Stoppzeit σ finden, die $\tau_1 < \sigma < \tau_2$ erfüllt?

Antwort: Im Allgemeinen nein. Aber: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert σ_ε mit

$$\mathbb{P}[\tau_1 < \sigma_\varepsilon < \tau_2] \geq 1 - \varepsilon.$$

Definition: Hitting Times

Frage: Was ist eine Hitting Time / Eintrittszeit?

Definition: Hitting Times

Frage: Was ist eine Hitting Time / Eintrittszeit?

Definition (Hitting Time)

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-Menge. Dann nennen $\tau_B : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\tau_B \triangleq \inf\big\{t \in \mathcal{T} : X(t) \in B\big\}$$

die **Hitting Time** der Menge B.

Frage: Unter welchen Voraussetzungen ist τ_B eine Stoppzeit?

Definition: Hitting Times

Frage: Was ist eine Hitting Time / Eintrittszeit?

Definition (Hitting Time)

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-Menge. Dann nennen $\tau_B : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\tau_B \triangleq \inf\big\{t \in \mathcal{T} : X(t) \in B\big\}$$

die **Hitting Time** der Menge B.

Frage: Unter welchen Voraussetzungen ist τ_B eine Stoppzeit?

Antwort: Im Allgemeinen äußerst schwierig zu beantworten. Die Antwort ist zum Beispiel positiv, wenn $\mathcal{T}$ endlich ist (Proposition 3).

Beispiele: Hitting Times

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Beispiel 1: Ist X stetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B

Beispiel 2: Ist X linksstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B

Beispiel 3: Ist X stetig und B offen, dann ist τ_B

Beispiel 4: Ist X rechtsstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B

Beispiele: Hitting Times

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Beispiel 1: Ist X stetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B eine Stoppzeit.

Beispiel 2: Ist X linksstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B

Beispiel 3: Ist X stetig und B offen, dann ist τ_B

Beispiel 4: Ist X rechtsstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B

Beispiele: Hitting Times

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Beispiel 1: Ist X stetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B eine Stoppzeit.

Beispiel 2: Ist X linksstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B i.A. keine Stoppzeit.

Beispiel 3: Ist X stetig und B offen, dann ist τ_B

Beispiel 4: Ist X rechtsstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B

Beispiele: Hitting Times

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Beispiel 1: Ist X stetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B eine Stoppzeit.

Beispiel 2: Ist X linksstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B i.A. keine Stoppzeit.

Beispiel 3: Ist X stetig und B offen, dann ist τ_B i.A. keine Stoppzeit.

Beispiel 4: Ist X rechtsstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B

Beispiele: Hitting Times

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $\mathfrak{F}$-adaptierter stochastischer Prozess und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ eine Borel-Menge. Wir nehmen an, dass $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Beispiel 1: Ist X stetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B eine Stoppzeit.

Beispiel 2: Ist X linksstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B i.A. keine Stoppzeit.

Beispiel 3: Ist X stetig und B offen, dann ist τ_B i.A. keine Stoppzeit.

Beispiel 4: Ist X rechtsstetig und B abgeschlossen, dann ist τ_B i.A. keine Stoppzeit.

Messbarkeit von Hitting Times

Theorem (Messbarkeit von Hitting Times)

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein **progressiv messbarer** Prozess mit Werten in einem topologischen Raum S mit Borel-σ-Algebra $\mathfrak{S}$. Angenommen, die Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ist **rechtsstetig**, d.h. $\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(t+)$ für alle $t \in \mathcal{T}$, und **vollständig**, d.h. jedes $\mathfrak{F}(t)$ enthält alle $\mathbb{P}$-Nullmengen. Sei weiter $B \in \mathfrak{S}$ eine beliebige **Borel-Menge**. Dann ist die Hitting Time τ_B von B eine Stoppzeit.

Messbarkeit von Hitting Times

Theorem (Messbarkeit von Hitting Times)

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein **progressiv messbarer** Prozess mit Werten in einem topologischen Raum S mit Borel-σ-Algebra $\mathfrak{S}$. Angenommen, die Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ist **rechtsstetig**, d.h. $\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(t+)$ für alle $t \in \mathcal{T}$, und **vollständig**, d.h. jedes $\mathfrak{F}(t)$ enthält alle $\mathbb{P}$-Nullmengen. Sei weiter $B \in \mathfrak{S}$ eine beliebige **Borel-Menge**. Dann ist die Hitting Time τ_B von B eine Stoppzeit.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass alle links- und alle rechtsstetige, $\mathfrak{F}$-adaptierte Prozesse progressiv messbar ist.

Messbarkeit von Hitting Times

Theorem (Messbarkeit von Hitting Times)

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein **progressiv messbarer** Prozess mit Werten in einem topologischen Raum S mit Borel-σ-Algebra $\mathfrak{S}$. Angenommen, die Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ist **rechtsstetig**, d.h. $\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(t+)$ für alle $t \in \mathcal{T}$, und **vollständig**, d.h. jedes $\mathfrak{F}(t)$ enthält alle $\mathbb{P}$-Nullmengen. Sei weiter $B \in \mathfrak{S}$ eine beliebige **Borel-Menge**. Dann ist die Hitting Time τ_B von B eine Stoppzeit.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass alle links- und alle rechtsstetige, $\mathfrak{F}$-adaptierte Prozesse progressiv messbar ist.

Bemerkung: Die Annahme, dass $\mathfrak{F}$ vollständig und rechtsstetig ist, bezeichnet mit typischerweise als die **Usual Conditions**.

Charakteristische Funktionen

Definition: Hitting Times

Frage: Was ist eine charakteristische Funktion?

Definition: Hitting Times

Frage: Was ist eine charakteristische Funktion?

Definition (Charakteristische Funktion)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine reellwertige Zufallsvariable. Dann nennen wir die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi_X(y) \triangleq \mathrm{E}\left[e^{iyX}\right] \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}$$

die **charakteristische Funktion** von X.

Definition: Hitting Times

Frage: Was ist eine charakteristische Funktion?

Definition (Charakteristische Funktion)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine reellwertige Zufallsvariable. Dann nennen wir die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi_X(y) \triangleq \mathrm{E}\left[e^{iyX}\right] \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}$$

die **charakteristische Funktion** von X.

Bemerkung: Die charakteristische Funktion bestimmt die Verteilung von X eindeutig.

Beispiel: Poisson-Verteilung

Sei X eine **Poisson-verteilte Zufallsvariable** mit Paramter $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X = k] =$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X.

Beispiel: Poisson-Verteilung

Sei X eine **Poisson-verteilte Zufallsvariable** mit Paramter $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X.

Beispiel: Poisson-Verteilung

Sei X eine **Poisson-verteilte Zufallsvariable** mit Paramter $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X.

Lösung: Die charakteristische Funktion φ_X von X ist

$$\varphi_X(y) = e^{\lambda(e^{iy}-1)} \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Konvergenz in Verteilung

Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und sei X eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

Konvergenz in Verteilung

Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und sei X eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X.

Konvergenz in Verteilung

Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und sei X eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X.

(ii) φ ist die charakteristische Funktion von X.

Konvergenz in Verteilung

Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und sei X eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- **(i)** $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X.
- **(ii)** φ ist die charakteristische Funktion von X.
- **(iii)** φ ist stetig.

Konvergenz in Verteilung

Theorem (Stetigkeitssatz von Lévy)

Sei $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit charakteristischen Funktionen $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und sei X eine weitere Zufallsvariable. Angenommen, die Folge $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X.

(ii) φ ist die charakteristische Funktion von X.

(iii) φ ist stetig.

(iv) φ ist stetig in 0.

Berechnung von Momenten

Frage: Wie hängt φ_X mit den Momenten von X zusammen?

Berechnung von Momenten

Frage: Wie hängt φ_X mit den Momenten von X zusammen?

Theorem

Sei $E[|X|^{k_0}] < \infty$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathrm{E}[X^k] = i^{-k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k} \varphi_X(y) \Big|_{y=0} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \leq k_0.$$

Aufgabe: Sei X Poisson-verteilt. Bestimmen Sie $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[X^2]$.

Berechnung von Momenten

Frage: Wie hängt φ_X mit den Momenten von X zusammen?

Theorem

Sei $E[|X|^{k_0}] < \infty$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathrm{E}[X^k] = i^{-k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k} \varphi_X(y)\Big|_{y=0} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \leq k_0.$$

Aufgabe: Sei X Poisson-verteilt. Bestimmen Sie $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[X^2]$.

Lösung: $\mathrm{E}[X] = \lambda$ und $\mathrm{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda$.