

Messbarkeit und Stochastische Prozesse

Tutorium Stochastische Prozesse
08. November 2016



Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:



Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen



Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen
- (2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen



Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen
- (2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen
- (3) Die Produkt- σ -Algebra



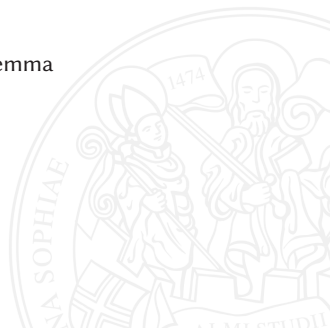
Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen
- (2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen
- (3) Die Produkt- σ -Algebra
- (4) Endlich-dimensionale Verteilungen



Im heutigen Tutorium besprechen wir:

- (1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen
- (2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen
- (3) Die Produkt- σ -Algebra
- (4) Endlich-dimensionale Verteilungen
- (5) Eindeutigkeit von Verteilungen und Dynkin's π - λ Lemma



Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow S$ **messbar**?

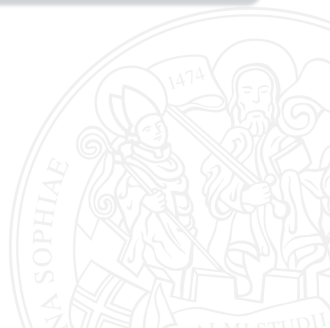


Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow S$ **messbar**?

Definition (Messbarkeit)

Seien (Ω, \mathfrak{A}) und (S, \mathfrak{G}) messbare Räume. Dann bezeichnen wir die Abbildung $X : \Omega \rightarrow S$ als **\mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbar**, wenn

$$\{X \in B\} \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}.$$



Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow S$ **messbar**?

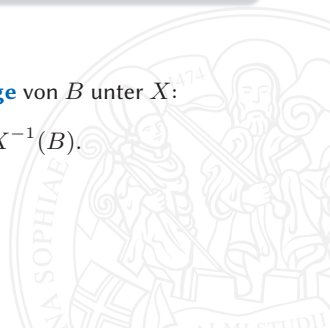
Definition (Messbarkeit)

Seien (Ω, \mathfrak{A}) und (S, \mathfrak{G}) messbare Räume. Dann bezeichnen wir die Abbildung $X : \Omega \rightarrow S$ als **\mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbar**, wenn

$$\{X \in B\} \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}.$$

Bemerkung: Mit $\{X \in B\}$ meinen wir die **Urbildmenge** von B unter X :

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B).$$



Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow S$ **messbar**?

Definition (Messbarkeit)

Seien (Ω, \mathfrak{A}) und (S, \mathfrak{G}) messbare Räume. Dann bezeichnen wir die Abbildung $X : \Omega \rightarrow S$ als **\mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbar**, wenn

$$\{X \in B\} \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}.$$

Bemerkung: Mit $\{X \in B\}$ meinen wir die **Urbildmenge** von B unter X :

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B).$$

Bemerkung: Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, heißt X **Zufallsvariable**.

Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X ?



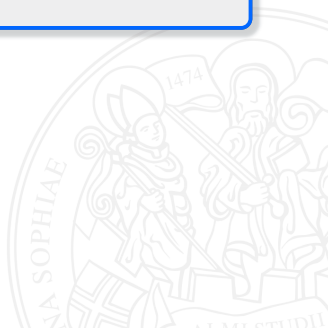
Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X ?

Definition (Verteilung)

Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathfrak{G})$ eine Zufallsvariable. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_X auf (S, \mathfrak{G}) mit

$$\mathbb{P}_X[B] \triangleq \mathbb{P}[X \in B] \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}$$

die **Verteilung** von X .



Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X ?

Definition (Verteilung)

Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathfrak{G})$ eine Zufallsvariable. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_X auf (S, \mathfrak{G}) mit

$$\mathbb{P}_X[B] \triangleq \mathbb{P}[X \in B] \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}$$

die **Verteilung** von X .

Bemerkung: Wir schreiben typischerweise $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ für die Verteilung von X . Anderer Schreibweisen sind:

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] = \mathbb{P}[\{X \in \cdot\}] = \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P}_X.$$

Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X ?

Definition (Verteilung)

Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathfrak{G})$ eine Zufallsvariable. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_X auf (S, \mathfrak{G}) mit

$$\mathbb{P}_X[B] \triangleq \mathbb{P}[X \in B] \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}$$

die **Verteilung** von X .

Bemerkung: Wir schreiben typischerweise $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ für die Verteilung von X . Anderer Schreibweisen sind:

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] = \mathbb{P}[\{X \in \cdot\}] = \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P}_X.$$

Bemerkung: $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist wohldefiniert aufgrund der Messbarkeit von X .

Frage: Was ist ein **stochastischer Prozess**?



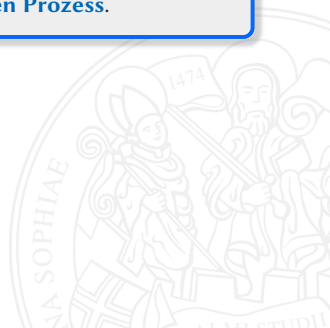
Frage: Was ist ein **stochastischer Prozess**?

Definition (Stochastischer Prozess)

Sei $\mathcal{T} \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge und sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ eine Familie von Zufallsvariablen

$$X(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathfrak{G}), \quad t \in \mathcal{T}.$$

Dann nennen wir die Familie X einen **stochastischen Prozess**.



Frage: Was ist ein **stochastischer Prozess**?

Definition (Stochastischer Prozess)

Sei $\mathcal{T} \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge und sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ eine Familie von Zufallsvariablen

$$X(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathfrak{G}), \quad t \in \mathcal{T}.$$

Dann nennen wir die Familie X einen **stochastischen Prozess**.

Bemerkung: Typischerweise wird \mathcal{T} als **Zeitindexmenge** aufgefasst. Die Zufallsvariable

$$\omega \mapsto X(t, \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

beschreibt dann den Prozess zum Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$.

Prozesse als pfadwertige Zufallsvariable

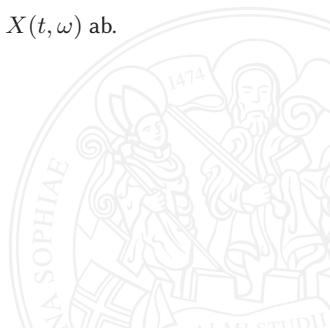
Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein (S, \mathfrak{G}) -wertiger stochastischer Prozess. Dann können wir den Prozess auch als pfadwertige Zufallsvariable auffassen:

$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega),$$

wobei $S^{\mathcal{T}}$ den sogenannten Pfadraum bezeichnet:

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}.$$

Das heißt also, jedes $\omega \in \Omega$ bildet auf die Abbildung $t \mapsto X(t, \omega)$ ab.



Prozesse als pfadwertige Zufallsvariable

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein (S, \mathfrak{G}) -wertiger stochastischer Prozess. Dann können wir den Prozess auch als pfadwertige Zufallsvariable auffassen:

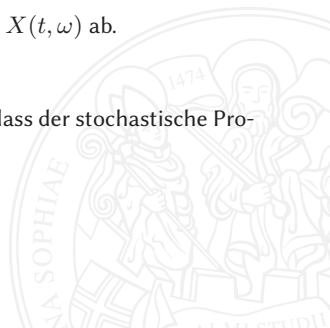
$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega),$$

wobei $S^{\mathcal{T}}$ den sogenannten Pfadraum bezeichnet:

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}.$$

Das heißt also, jedes $\omega \in \Omega$ bildet auf die Abbildung $t \mapsto X(t, \omega)$ ab.

Frage: Gibt es eine σ -Algebra auf dem Pfadraum $S^{\mathcal{T}}$, so dass der stochastische Prozess X als pfadwertige Zufallsvariable messbar ist?



Die Produkt- σ -Algebra

Frage: Wie ist die Produkt- σ -Algebra \mathfrak{G}^T auf S^T definiert?



Frage: Wie ist die Produkt- σ -Algebra $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ definiert?

Definition (Produkt- σ -Algebra)

Die **Produkt- σ -Algebra** $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ ist definiert als

$$\mathfrak{G}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\mathfrak{Z}),$$

wobei \mathfrak{Z} die **endlich-dimensionalen Zylindermengen** bezeichnet:

$$\mathfrak{Z} \triangleq \left\{ \prod_{t \in \mathcal{T}} B_t : B_t \in \mathfrak{G} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T} \right\}.$$

Frage: Wie ist die Produkt- σ -Algebra $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ definiert?

Definition (Produkt- σ -Algebra)

Die **Produkt- σ -Algebra** $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ ist definiert als

$$\mathfrak{G}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\mathfrak{Z}),$$

wobei \mathfrak{Z} die **endlich-dimensionalen Zylindermengen** bezeichnet:

$$\mathfrak{Z} \triangleq \left\{ \prod_{t \in \mathcal{T}} B_t : B_t \in \mathfrak{G} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T} \right\}.$$

Übungsaufgabe: Ein stochastischer Prozess X aufgefasst als pfadwertige Zufallsvariable ist \mathfrak{A} - $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ -messbar. Umgekehrt gilt für jede \mathfrak{A} - $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ -messbare Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}$, dass $X(t)$ für alle $t \in \mathcal{T}$ eine \mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbare Zufallsvariable ist.

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess. Da die pfadwertige Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega)$$

eine \mathfrak{A} - $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ -messbare Zufallsvariable ist, existiert die **Verteilung** von X :

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] : \mathfrak{G}^{\mathcal{T}} \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}[X \in B].$$

$\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist also ein **Maß** auf $(S^{\mathcal{T}}, \mathfrak{G}^{\mathcal{T}})$.



Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess. Da die pfadwertige Zufallsvariable

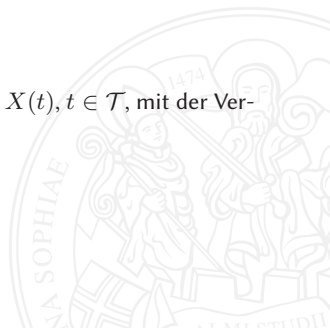
$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega)$$

eine \mathfrak{A} - $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ -messbare Zufallsvariable ist, existiert die **Verteilung** von X :

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] : \mathfrak{G}^{\mathcal{T}} \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}[X \in B].$$

$\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist also ein **Maß** auf $(S^{\mathcal{T}}, \mathfrak{G}^{\mathcal{T}})$.

Frage: Wie hängen die Verteilungen der Zufallsvariablen $X(t)$, $t \in \mathcal{T}$, mit der Verteilung des Prozesses X zusammen?



Frage: Was sind die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X ?



Frage: Was sind die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X ?

Definition (Endlich-Dimensionale Verteilungen)

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess und $\mathcal{F} = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathcal{T}$ eine endliche Teilmenge von \mathcal{T} . Definiere einen Zufallsvektor $X^{\mathcal{F}}$ durch

$$X^{\mathcal{F}} \triangleq (X(t_1), \dots, X(t_n))$$

und bezeichne mit $\mathbb{P}^{\mathcal{F}} = \mathbb{P}[X^{\mathcal{F}} \in \cdot]$ die Verteilung von $X^{\mathcal{F}}$ auf $(S^{\mathcal{F}}, \mathfrak{G}^{\mathcal{F}})$. Dann bezeichnen wir die Familie

$$\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}\}$$

als die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X .

Charakterisierung der Verteilung

Behauptung: Die endlich-dimensionalen Verteilungen bestimmen die Verteilung eines Prozesses eindeutig.



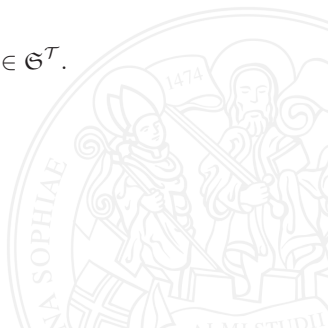
Charakterisierung der Verteilung

Behauptung: Die endlich-dimensionalen Verteilungen bestimmen die Verteilung eines Prozesses eindeutig.

Wir haben also folgende Aussage zu beweisen:

- Sei X ein Prozess mit endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$
 - und sei Y ein Prozess mit denselben endlich-dimensionalen Verteilungen,
- dann haben X und Y dieselbe Verteilung, d.h.

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[Y \in B] \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}^{\mathcal{T}}.$$



Charakterisierung der Verteilung

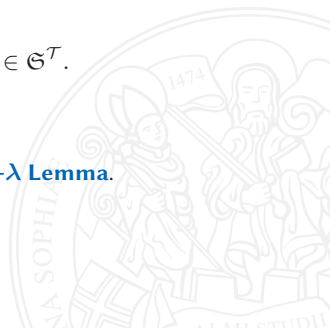
Behauptung: Die endlich-dimensionalen Verteilungen bestimmen die Verteilung eines Prozesses eindeutig.

Wir haben also folgende Aussage zu beweisen:

- Sei X ein Prozess mit endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$
 - und sei Y ein Prozess mit denselben endlich-dimensionalen Verteilungen,
- dann haben X und Y dieselbe Verteilung, d.h.

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[Y \in B] \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{G}^{\mathcal{T}}.$$

Bemerkung: Für den Beweis benötigen wir **Dynkin's π - λ Lemma**.



Definition (π -System)

Ein nicht-leeres Mengensystem \mathfrak{J} von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **π -System**, wenn es stabil unter endlich vielen Schnitten ist.



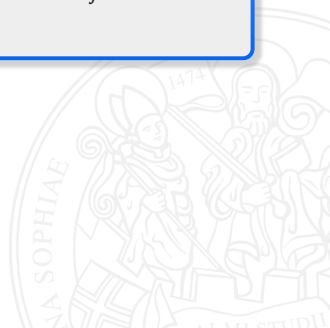
Dynkin's π - λ Lemma

Definition (π -System)

Ein nicht-leeres Mengensystem \mathfrak{J} von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **π -System**, wenn es stabil unter endlich vielen Schnitten ist.

Definition (λ -System)

Ein Mengensystem \mathfrak{E} von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **λ -System**, wenn $S^{\mathcal{T}} \in \mathfrak{E}$ und \mathfrak{E} stabil unter Komplementbildung und abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.



Dynkin's π - λ Lemma

Definition (π -System)

Ein nicht-leeres Mengensystem \mathfrak{J} von Teilmengen von S^T heißt **π -System**, wenn es stabil unter endlich vielen Schnitten ist.

Definition (λ -System)

Ein Mengensystem \mathfrak{E} von Teilmengen von S^T heißt **λ -System**, wenn $S^T \in \mathfrak{E}$ und \mathfrak{E} stabil unter Komplementbildung und abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.

Theorem (Dynkin's π - λ Lemma)

Sei \mathfrak{J} ein π -System und sei $\lambda(\mathfrak{J})$ das kleinste λ -System, welches \mathfrak{J} enthält. Dann gilt

$$\lambda(\mathfrak{J}) = \sigma(\mathfrak{J}).$$

Zusammenfassung:



Zusammenfassung:

- (1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.



Zusammenfassung:

- (1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.
- (2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine \mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbare Abbildung.



Zusammenfassung:

- (1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.
- (2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine \mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbare Abbildung.
- (3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

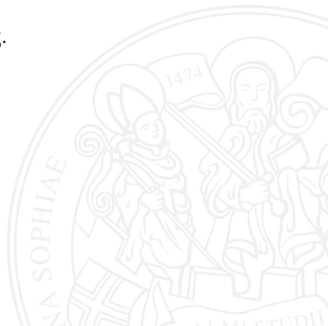


Zusammenfassung:

- (1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.
- (2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine \mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbare Abbildung.
- (3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

- (4) In diesem Fall ist X eine \mathfrak{A} - $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ -messbare Abbildung.

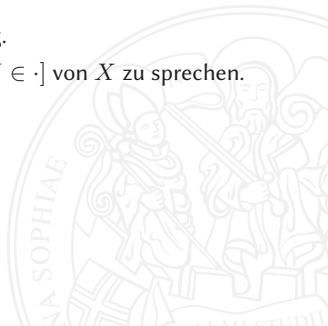


Zusammenfassung:

- (1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.
- (2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine \mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbare Abbildung.
- (3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

- (4) In diesem Fall ist X eine \mathfrak{A} - $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ -messbare Abbildung.
- (5) Es macht deshalb auch Sinn, von der Verteilung $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ von X zu sprechen.



Zusammenfassung:

- (1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.
- (2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine \mathfrak{A} - \mathfrak{G} -messbare Abbildung.
- (3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \rightarrow S^{\mathcal{T}}, \quad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

- (4) In diesem Fall ist X eine \mathfrak{A} - $\mathfrak{G}^{\mathcal{T}}$ -messbare Abbildung.
- (5) Es macht deshalb auch Sinn, von der Verteilung $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ von X zu sprechen.
- (6) Die Verteilung $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist eindeutig durch die endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmt.

