Universität Trier

Messbarkeit und Stochastische Prozesse

Tutorium Stochastische Prozesse
08. November 2016

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen

(2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen

(2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen

(3) Die Produkt-σ-Algebra

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen

(2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen

(3) Die Produkt-σ-Algebra

(4) Endlich-dimensionale Verteilungen

Inhalte des heutigen Tutoriums

Im heutigen Tutorium besprechen wir:

(1) Messbarkeit, Zufallsvariablen und Verteilungen
(2) Stochastische Prozesse als pfadwertige Zufallsvariablen
(3) Die Produkt-σ-Algebra
(4) Endlich-dimensionale Verteilungen
(5) Eindeutigkeit von Verteilungen und Dynkin's π-λ Lemma

Messbare Abbildung

Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \to S$ **messbar**?

Messbare Abbildung

Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \to S$ **messbar**?

Definition (Messbarkeit)

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(S, \mathfrak{S})$ messbare Räume. Dann bezeichnen wir die Abbildung $X : \Omega \to S$ als **$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbar**, wenn

$$\{X \in B\} \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}.$$

Messbare Abbildung

Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \to S$ **messbar**?

Definition (Messbarkeit)

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(S, \mathfrak{S})$ messbare Räume. Dann bezeichnen wir die Abbildung $X : \Omega \to S$ als **$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbar**, wenn

$$\{X \in B\} \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}.$$

Bemerkung: Mit $\{X \in B\}$ meinen wir die **Urbildmenge** von B unter X:

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B).$$

Messbare Abbildung

Frage: Wann ist eine Abbildung $X : \Omega \to S$ **messbar**?

Definition (Messbarkeit)

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(S, \mathfrak{S})$ messbare Räume. Dann bezeichnen wir die Abbildung $X : \Omega \to S$ als **$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbar**, wenn

$$\{X \in B\} \in \mathfrak{A} \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}.$$

Bemerkung: Mit $\{X \in B\}$ meinen wir die **Urbildmenge** von B unter X:

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B).$$

Bemerkung: Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, heißt X **Zufallsvariable**.

Verteilungen

Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X?

Verteilungen

Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X?

Definition (Verteilung)

Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to (S, \mathfrak{S})$ eine Zufallsvariable. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X$ auf $(S, \mathfrak{S})$ mit

$$\mathbb{P}_X[B] \triangleq \mathbb{P}[X \in B] \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}$$

die **Verteilung** von X.

Verteilungen

Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X?

Definition (Verteilung)

Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to (S, \mathfrak{S})$ eine Zufallsvariable. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X$ auf $(S, \mathfrak{S})$ mit

$$\mathbb{P}_X[B] \triangleq \mathbb{P}[X \in B] \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}$$

die **Verteilung** von X.

Bemerkung: Wir schreiben typischerweise $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ für die Verteilung von X. Anderer Schreibweisen sind:

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] = \mathbb{P}[\{X \in \cdot\}] = \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P}_X.$$

Verteilungen

Frage: Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X?

Definition (Verteilung)

Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to (S, \mathfrak{S})$ eine Zufallsvariable. Dann nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X$ auf $(S, \mathfrak{S})$ mit

$$\mathbb{P}_X[B] \triangleq \mathbb{P}[X \in B] \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}$$

die **Verteilung** von X.

Bemerkung: Wir schreiben typischerweise $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ für die Verteilung von X. Anderer Schreibweisen sind:

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] = \mathbb{P}[\{X \in \cdot\}] = \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P}_X.$$

Bemerkung: $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist wohldefiniert aufgrund der Messbarkeit von X.

Stochastische Prozesse

Frage: Was ist ein **stochastischer Prozess**?

Stochastische Prozesse

Frage: Was ist ein **stochastischer Prozess**?

Definition (Stochastischer Prozess)

Sei $\mathcal{T} \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge und sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ eine Familie von Zufallsvariablen

$$X(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to (S, \mathfrak{S}), \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Dann nennen wir die Familie X einen **stochastischen Prozess**.

Stochastische Prozesse

Frage: Was ist ein **stochastischer Prozess**?

Definition (Stochastischer Prozess)

Sei $\mathcal{T} \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge und sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ eine Familie von Zufallsvariablen

$$X(t) : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to (S, \mathfrak{S}), \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Dann nennen wir die Familie X einen **stochastischen Prozess**.

Bemerkung: Typischerweise wird $\mathcal{T}$ als **Zeitindexmenge** aufgefasst. Die Zufallsvariable

$$\omega \mapsto X(t, \omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

beschreibt dann den Prozess zum Zeitpunkt $t \in \mathcal{T}$.

Prozesse als pfadwertige Zufallsvariable

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein $(S, \mathfrak{S})$-wertiger stochastischer Prozess. Dann können wir den Prozess auch als pfadwertige Zufallsvariable auffassen:

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega),$$

wobei $S^{\mathcal{T}}$ den sogenannten Pfadraum bezeichnet:

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}.$$

Das heißt also, jedes $\omega \in \Omega$ bildet auf die Abbildung $t \mapsto X(t, \omega)$ ab.

Prozesse als pfadwertige Zufallsvariable

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein $(S, \mathfrak{S})$-wertiger stochastischer Prozess. Dann können wir den Prozess auch als pfadwertige Zufallsvariable auffassen:

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega),$$

wobei $S^{\mathcal{T}}$ den sogenannten Pfadraum bezeichnet:

$$S^{\mathcal{T}} \triangleq \{f : f \text{ ist Abbildung von } \mathcal{T} \text{ nach } S\}.$$

Das heißt also, jedes $\omega \in \Omega$ bildet auf die Abbildung $t \mapsto X(t, \omega)$ ab.

Frage: Gibt es eine σ-Algebra auf dem Pfadraum $S^{\mathcal{T}}$, so dass der stochastische Prozess X als pfadwertige Zufallsvariable messbar ist?

Die Produkt-σ-Algebra

Frage: Wie ist die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ definiert?

Die Produkt-σ-Algebra

Frage: Wie ist die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ definiert?

Definition (Produkt-σ-Algebra)

Die **Produkt-σ-Algebra** $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ ist definiert als

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\mathfrak{Z}),$$

wobei $\mathfrak{Z}$ die **endlich-dimensionalen Zylindermengen** bezeichnet:

$$\mathfrak{Z} \triangleq \Big\{\textstyle\prod_{t\in\mathcal{T}} B_t : B_t \in \mathfrak{S} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und}$$
$$B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T}\Big\}.$$

Die Produkt-σ-Algebra

Frage: Wie ist die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ definiert?

Definition (Produkt-σ-Algebra)

Die **Produkt-σ-Algebra** $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ auf $S^{\mathcal{T}}$ ist definiert als

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\mathfrak{Z}),$$

wobei $\mathfrak{Z}$ die **endlich-dimensionalen Zylindermengen** bezeichnet:

$$\mathfrak{Z} \triangleq \Big\{\prod_{t\in\mathcal{T}} B_t : B_t \in \mathfrak{S} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } \\ B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T}\Big\}.$$

Übungsaufgabe: Ein stochasticher Prozess X aufgefasst als pfadwertige Zufallsvariable ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbar. Umgekehrt gilt für jede $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbare Zufallsvariable $X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}$, dass $X(t)$ für alle $t \in \mathcal{T}$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Zufallsvariable ist.

Verteilung von stochastischen Prozessen

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess. Da die pfadwertige Zufallsvariable

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot,\omega)$$

eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbare Zufallsvariable ist, existiert die **Verteilung** von X:

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] : \mathfrak{S}^{\mathcal{T}} \to [0,1], \qquad B \mapsto \mathbb{P}[X \in B].$$

$\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist also ein **Maß** auf $(S^{\mathcal{T}}, \mathfrak{S}^{\mathcal{T}})$.

Verteilung von stochastischen Prozessen

Sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess. Da die pfadwertige Zufallsvariable

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega)$$

eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbare Zufallsvariable ist, existiert die **Verteilung** von X:

$$\mathbb{P}[X \in \cdot] : \mathfrak{S}^{\mathcal{T}} \to [0,1], \qquad B \mapsto \mathbb{P}[X \in B].$$

$\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist also ein **Maß** auf $(S^{\mathcal{T}}, \mathfrak{S}^{\mathcal{T}})$.

Frage: Wie hängen die Verteilungen der Zufallsvariablen $X(t)$, $t \in \mathcal{T}$, mit der Verteilung des Prozesses X zusammen?

Endlich-Dimensionale Verteilungen

Frage: Was sind die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X?

Endlich-Dimensionale Verteilungen

Frage: Was sind die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X?

Definition (Endlich-Dimensionale Verteilungen)

Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess und $\mathcal{F} = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathcal{T}$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{T}$. Definiere einen Zufallsvektor $X^{\mathcal{F}}$ durch

$$X^{\mathcal{F}} \triangleq \big(X(t_1), \ldots, X(t_n)\big)$$

und bezeichne mit $\mathbb{P}^{\mathcal{F}} = \mathbb{P}[X^{\mathcal{F}} \in \cdot]$ die Verteilung von $X^{\mathcal{F}}$ auf $(S^{\mathcal{F}}, \mathfrak{S}^{\mathcal{F}})$. Dann bezeichnen wir die Familie

$$\big\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}\big\}$$

als die **endlich-dimensionalen Verteilungen** von X.

Charakterisierung der Verteilung

Behauptung: Die endlich-dimensionalen Verteilungen bestimmen die Verteilung eines Prozesses eindeutig.

Charakterisierung der Verteilung

Behauptung: Die endlich-dimensionalen Verteilungen bestimmen die Verteilung eines Prozesses eindeutig.

Wir haben also folgende Aussage zu beweisen:

- Sei X ein Prozess mit endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$
- und sei Y ein Prozess mit denselben endlich-dimensionalen Verteilungen,

dann haben X und Y dieselbe Verteilung, d.h.

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[Y \in B] \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}^{\mathcal{T}}.$$

Charakterisierung der Verteilung

Behauptung: Die endlich-dimensionalen Verteilungen bestimmen die Verteilung eines Prozesses eindeutig.

Wir haben also folgende Aussage zu beweisen:

- Sei X ein Prozess mit endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}\subset\mathcal{T} \text{ endlich}}$
- und sei Y ein Prozess mit denselben endlich-dimensionalen Verteilungen,

dann haben X und Y dieselbe Verteilung, d.h.

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[Y \in B] \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{S}^{\mathcal{T}}.$$

Bemerkung: Für den Beweis benötigen wir **Dynkin's π-λ Lemma**.

Dynkin's π-λ Lemma

Definition (π-System)

Ein nicht-leeres Mengensystem $\mathfrak{Z}$ von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **π-System**, wenn es stabil unter endlich vielen Schnitten ist.

Dynkin's π-λ Lemma

Definition (π-System)

Ein nicht-leeres Mengensystem $\mathfrak{Z}$ von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **π-System**, wenn es stabil unter endlich vielen Schnitten ist.

Definition (λ-System)

Ein Mengensystem $\mathfrak{E}$ von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **λ-System**, wenn $S^{\mathcal{T}} \in \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$ stabil unter Komplementbildung und abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.

Dynkin's π-λ Lemma

Definition (π-System)

Ein nicht-leeres Mengensystem $\mathfrak{Z}$ von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **π-System**, wenn es stabil unter endlich vielen Schnitten ist.

Definition (λ-System)

Ein Mengensystem $\mathfrak{E}$ von Teilmengen von $S^{\mathcal{T}}$ heißt **λ-System**, wenn $S^{\mathcal{T}} \in \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}$ stabil unter Komplementbildung und abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.

Theorem (Dynkin's π-λ Lemma)

Sei $\mathfrak{Z}$ ein π-System und sei $\lambda(\mathfrak{Z})$ das kleinste λ-System, welches $\mathfrak{Z}$ enthält. Dann gilt

$$\lambda(\mathfrak{Z}) = \sigma(\mathfrak{Z}).$$

Zusammenfassung

Zusammenfassung:

Zusammenfassung:

(1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.

Zusammenfassung

Zusammenfassung:

(1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.

(2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Abbildung.

Zusammenfassung:

(1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.

(2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Abbildung.

(3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

Zusammenfassung:

(1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.

(2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Abbildung.

(3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

(4) In diesem Fall ist X eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbare Abbildung.

Zusammenfassung:

(1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.

(2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Abbildung.

(3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

(4) In diesem Fall ist X eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbare Abbildung.

(5) Es macht deshalb auch Sinn, von der Verteilung $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ von X zu sprechen.

Zusammenfassung:

(1) Stochastische Prozesse $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sind Familien von **Zufallsvariablen**.

(2) Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist die Zufallsvariable $X(t)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Abbildung.

(3) Wir können Prozesse aber auch als pfadwertige Zufallsvariablen auffassen:

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega).$$

(4) In diesem Fall ist X eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbare Abbildung.

(5) Es macht deshalb auch Sinn, von der Verteilung $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ von X zu sprechen.

(6) Die Verteilung $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ ist eindeutig durch die endlich-dimensionalen Verteilungen $\{\mathbb{P}^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T} \text{ endlich}}$ bestimmt.