Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag, 01. Dezember, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $N = \{N(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ ein Poisson Prozess mit konstanter Intensität ϑ. Zeigen Sie, dass

$$\tau \triangleq \inf\{t \geq 0 : N(t) = 1\}$$

eine exponentialverteilte Stoppzeit mit Parameter ϑ ist.

Aufgabe 2
Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter ϑ und definiere eine Folge $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Partialsummen

$$S_n \triangleq \sum_{i=1}^n Z_i \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die gemeinsame Verteilung der ersten n Partialsummen $S_1, \ldots, S_n$ die folgende Dichtefunktion besitzt:

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \vartheta^n e^{-\vartheta t_n} \mathbb{1}_{\{0\leq t_1\leq t_2\leq \ldots \leq t_n\}}.$$

Aufgabe 3
Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter ϑ. Wir definieren einen Erneurungsprozess $N = \{N(t)\}_{t\geq 0}$ durch

$$N(t) \triangleq \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^n Z_i \leq t\} \qquad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass für alle $s \leq t$ und $j, k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\big[N(s) = j, N(t) - N(s) = k\big] = e^{-\vartheta s}\frac{(\vartheta s)^j}{j!} e^{-\vartheta(t-s)}\frac{(\vartheta(t-s))^k}{k!}.$$

Folgern Sie, dass $N(t) - N(s)$ unabhängig von $N(s)$ ist, und dass $N(t) - N(s)$ Poissonverteilt mit Paramter $\vartheta(t - s)$ ist.
Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2 benutzen.

Aufgabe 4

(a) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Zeigen Sie, dass es keine Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum gibt.

(b) Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mathfrak{A}$ die Borel-σ-algebra auf $[0, 1]$ und $\mathbb{P}$ das Lebesgue-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Konstruieren Sie eine Folge $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, so dass jedes Z_n Bernoulli-verteilt mit Parameter $1/2$ ist.