Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Universität Trier
Wintersemester 2016/17

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 4

Abgabe: Donnerstag, 24. November, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtrierung und seien τ und ρ Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{F}(\tau \vee \rho) = \sigma\big(\mathfrak{F}(\tau), \mathfrak{F}(\rho)\big).$$

Aufgabe 2

Seien τ und σ Stoppzeiten und X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1}_{\{\sigma=\tau\}}\mathbb{E}\big[X|\mathfrak{F}(\sigma)\big] = \mathbb{1}_{\{\sigma=\tau\}}\mathbb{E}\big[X|\mathfrak{F}(\tau)\big] \quad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 3

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Wir nennen X symmetrisch, wenn X und $-X$ identisch verteilt sind.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann symmetrisch ist, wenn φ_X reellwertig ist.

(b) Seien X und Y unabhängig identisch verteilt. Zeigen Sie, dass $X - Y$ symmetrisch ist.

Aufgabe 4

(a) Sei Γ ein Poisson Zufallsmaß mit Intensität μ und seien $A, B \in \mathfrak{S}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\Gamma(A)\Gamma(B)] = \mu(A \cap B) + \mu(A)\mu(B).$$

(b) Seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ unabhängige Poisson Zufallsmaße mit Intensitäten $\mu_1, \ldots, \mu_n$ und sei $\Gamma \triangleq \sum_{i=1}^n \Gamma_i$. Zeigen Sie, dass Γ ein Poisson Zufallsmaß ist und bestimmen Sie die Intensität μ.