Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 3

Abgabe: Donnerstag, 17. November, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1

Es sei $(S, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von S-wertigen u.i.v. Zufallsvariablen. Wir betrachten einen White Noise Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$X(t) \triangleq Z_t \text{ für alle } t \in \mathbb{N}$$

zusammen mit der natürlichen Filtrierung $\mathfrak{F} \triangleq \mathfrak{F}^X$ von X. Weiter sei $B \in \mathfrak{S}$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Zufallsvariable eine Stoppzeit ist:

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \qquad \tau(\omega) \triangleq \inf\{t \in \mathbb{N} : X(t, \omega) \in B\}.$$

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von τ und zeigen Sie, dass $\tau < \infty$ f.s. genau dann gilt, wenn $\mathbb{P}[Z_1 \in B] > 0$.

Aufgabe 2

Es sei X ein reellwertiger, adaptierter, wachsender und rechtsstetiger Prozess und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Zufallsvariable eine Stoppzeit ist:

$$\tau_a : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}, \qquad \tau_a(\omega) \triangleq \inf\{t \in \mathcal{T} : X(t, \omega) \geq a\}.$$

Aufgabe 3

Es sei $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ eine Zufallsvariable auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Setze $\mathfrak{F}(\infty) = \sigma(\mathfrak{F}(t) : t \in [0, \infty))$. Dann nennt man τ *optionale Zeit*, wenn

$$\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \infty].$$

Zeigen Sie, dass jede Stoppzeit eine optionale Zeit ist, und dass τ genau dann optional ist, wenn τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung $\mathfrak{F}(\cdot+) = \{\mathfrak{F}(t+)\}_{t\in[0,\infty)}$ ist.
Hinweis: Für $t \in [0, \infty)$ ist die σ-Algebra $\mathfrak{F}(t+)$ ist definiert als

$$\mathfrak{F}(t+) \triangleq \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}(s).$$

$\longrightarrow$ Zweite Seite nicht vergessen!

Aufgabe 4
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega : \mathcal{T} \to \mathbb{R}\}$, die Menge aller Funktionen von $\mathcal{T}$ nach $\mathbb{R}$. Insbesondere gilt dann, dass für jedes $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathcal{T}$ auch $\omega(\cdot \wedge t)$, der zum Zeitpunkt t gestoppte Pfad, ein Element von Ω ist. Weiter sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ der sogenannte kanonische Prozess gegeben durch

$$X(t, \omega) = \omega(t), \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{T},\ \omega \in \Omega.$$

Bezeichne mit $\{\mathfrak{F}^X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ die natürliche Filtrierung von X und definiere $\mathfrak{F}^X(\infty) = \sigma(X(t) : t \in \mathcal{T})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $F \subset \Omega$. Dann gilt $F \in \mathfrak{F}^X(t)$ genau dann, wenn $F \in \mathfrak{F}^X(\infty)$ und

$$\Big[\omega \in F \text{ und } X(s, \omega) = X(s, \bar{\omega}) \text{ für alle } s \in \mathcal{T} \text{ mit } s \leq t\Big] \text{ impliziert } \bar{\omega} \in F.$$

Hinweis für die $\Rightarrow$ Richtung: Überzeugen Sie sich zunächst, dass die Aussage für alle $F \triangleq \{X(s) \in B\}$, $s \in \mathcal{T}$, $s \leq t$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, gilt.
Hinweis für die $\Leftarrow$ Richtung: Zeigen sie, dass die Abbildung $a_t : \Omega \to \Omega$ mit

$$a_t(\omega) \triangleq \omega(\cdot \wedge t), \qquad \omega \in \Omega,$$

eine $\mathfrak{F}^X(t)$-$\mathfrak{F}^X(\infty)$-messbare Abbildung ist und dass $F = a_t^{-1}(F)$ gilt.

(b) τ ist genau dann eine $\mathfrak{F}^X$-Stoppzeit, wenn τ eine $\mathfrak{F}^X(\infty)$-messbare Zufallsvariable ist und für alle $t \in \mathcal{T}$ folgende Aussage gilt:

$$\Big[\tau(\omega) \leq t \text{ und } X(s, \omega) = X(s, \bar{\omega}) \text{ für alle } s \in \mathcal{T} \text{ mit } s \leq t\Big] \text{ impliziert } \tau(\bar{\omega}) \leq t.$$