Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Universität Trier
Wintersemester 2016/17

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 2

Abgabe: Donnerstag, 10. November, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1

Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, so dass jedes Z_n, $n \in \mathbb{N}$, gleichverteilt auf $[0,1]$ ist. Weiter sei $p \in (0,1)$ und

$$g : [0,1] \times \{0,1\} \to \{0,1\}, \qquad g(z,x) = \begin{cases} x & \text{falls } z < p, \\ 1-x & \text{falls } z \geq p. \end{cases}$$

Sei $X(0)$ eine von allen Z_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\{0,1\}$ und definiere eine $\{0,1\}$-wertige Markov-Kette $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$X(t) \triangleq g\big(Z_t, X(t-1)\big) \text{ für alle } t \in \mathbb{N}.$$

Wie muss $X(0)$ gewählt werden, damit X stationär ist?

Aufgabe 2

Sei $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{R}$-wertigen, unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen und sei $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ ein Random Walk mit

$$X(t) \triangleq \textstyle\sum_{n=1}^{t} Z_n \text{ für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass der Random Walk $\mathfrak{F}^Z$-adaptiert ist.
Hinweis: $\mathfrak{F}^Z$ bezeichnet hier die natürliche Filtrierung des White Noise Prozesses $Z = \{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erweitert auf den Zeitpunkt $t = 0$ durch $\mathfrak{F}^Z(0) \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$.

Aufgabe 3

Sei τ eine Stoppzeit auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{F}(\tau) \triangleq \big\{F \in \mathfrak{A} : F \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}(t) \text{ für alle } t \in \mathcal{T}\big\}$$

eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ ist.

(b) Sei $t \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{F}(\tau) = \mathfrak{F}(t)$ gilt, falls $\tau(\omega) = t$ für alle $\omega \in \Omega$.

Aufgabe 4

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten $\tau_n : \Omega \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\tau : \Omega \to [0,\infty], \qquad \tau(\omega) \triangleq \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n(\omega).$$

eine Stoppzeit ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathcal{T} \cup \{\infty\}$ genau dann eine Stoppzeit ist, wenn der Indikatorprozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ gegeben durch

$$X(t) \triangleq \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} \text{ für alle } t \in \mathcal{T}$$

adaptiert ist.