Prof. Frank Seifried
Dr. Christoph Belak

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 1

Abgabe: Donnerstag, 03. November, 10:15 Uhr.

Aufgabe 1
Sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in einem messbaren Raum $(S, \mathfrak{S})$. Zeigen Sie, dass die pfadwertige Zufallsvariable

$$X : \Omega \to S^{\mathcal{T}}, \qquad \omega \mapsto X(\cdot, \omega) \triangleq \{X(t, \omega)\}_{t \in \mathcal{T}}$$

genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$-messbar ist, wenn für alle $t \in \mathcal{T}$ die Zufallsvariable

$$X(t, \cdot) : \Omega \to S, \qquad \omega \mapsto X(t, \omega)$$

eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{S}$-messbare Abbildung ist.
Hinweis: Die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}}$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra, welche die endlich-dimensionalen Zylindermengen

$$\mathfrak{Z} \triangleq \Big\{ \textstyle\prod_{t \in \mathcal{T}} B_t \ : \ B_t \in \mathfrak{S} \text{ für alle } t \in \mathcal{T} \text{ und } B_t \neq S \text{ für maximal endlich viele } t \in \mathcal{T} \Big\}.$$

enthält, d.h. $\mathfrak{S}^{\mathcal{T}} \triangleq \sigma(\mathfrak{Z})$.

Aufgabe 2
Es sei $X = \{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. X heißt *adaptiert* bezüglich der Filtrierung $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, wenn gilt

$$X(t) \text{ ist } \mathfrak{F}(t)\text{-messbar für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Zeigen Sie, dass X genau dann $\mathfrak{F}$-adaptiert ist, wenn gilt

$$\mathfrak{F}^X(t) \subset \mathfrak{F}(t) \text{ für alle } t \in \mathcal{T}.$$

Folgern Sie, dass $\mathfrak{F}^X$ die kleinste Filtrierung ist, bezüglich der X adaptiert ist.
Hinweis: Die natürliche Filtrierung $\mathfrak{F}^X = \{\mathfrak{F}^X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ ist definiert durch

$$\mathfrak{F}^X(t) \triangleq \sigma\big(X(s), s \in \mathcal{T}, s \leq t\big) \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{T}.$$

⟶ Zweite Seite nicht vergessen!

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{T} \triangleq [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass f von endlicher Variation ist, wenn f monoton wachsend ist.

(b) Zeigen Sie, dass f von endlicher Variation ist, wenn f die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen $f_1, f_2 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass f genau dann von endlicher Variation ist, wenn f die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen $f_1, f_2 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ ist.
Hinweis: Wählen Sie $f_1 \triangleq V_f$ und $f_2 \triangleq V_f - f$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass ein Prozess $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit $X(0) = 0$ genau dann ein Random Walk ist, wenn X stationäre und unabhängige Inkremente hat.
Hinweis: Mit stationären Inkrementen ist gemeint, dass für alle $s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $s \leq t$ gilt, dass das Inkrement $X(t) - X(s)$ die gleiche Verteilung wie $X(t - s)$ hat.
Hinweis: Mit unabhängigen Inkrementen ist gemeint, dass für alle $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{N}_0$ mit $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ die Inkremente $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ unabhängig sind.